

Sesión 20

Hora: 59:26

Fecha: 19/08/21

Daniela: Profe, buenas noches.

Facilitadora: Buenas noches. Apenas vamos a empezar estábamos compartiendo penas.

Daniela: Ah bueno.

Facilitadora: Bueno, estamos trabajando con multiplicación y división pensando en las estrategias que usan los estudiantes. Entonces la semana pasada hablamos mucho de modelación directa ya sea usando material concreto y Valentina nos había compartido alguna experiencia de aula, entonces teníamos ejemplos con dibujos y nos compartió una experiencia muy bonita que ella ha estado trabajando en el aula. Inclusive, Daniela no estuvo la semana pasada, pero ella montó una presentación y nos contó la historia de lo que ha estado haciendo y lo contenta que está con el trabajo. Ella también habló en algún momento, casi al final, de que hay un estudiante que decía que había sido, ¿cuál fue la palabra que usó? Como desobediente porque no había seguido las instrucciones que la maestra le ha dado, pero yo le decía a ese día a Valentina que eso pegaba con otra de las estrategias que usan las personas, que es la de conteo, o cuando hacemos suma. Entonces cuando ya logramos que la persona madure un poco las ideas, entonces ya deja de usar granitos de maíz o granitos de frijol y el cartón de huevos y empieza a generar otras alternativas. Entonces aquí estamos ya en esa segunda opción, que es cuando ya empezamos a pensar en conteo, bueno, los estudiantes y las estudiantes. Hay que tener en cuenta que cuando hablamos de multiplicación y división, las estrategias son más difíciles de entender y de usar que cuando usamos suma y resta y que por esa razón necesitaban un poco más de tiempo para ir las madurando entonces es probable que veamos que en suma y resta aprendieron más fácilmente pero aquí la multiplicación y división tardan un poquito más.

Hola Valentina.

Valentina: Buenas noches.

Facilitadora: ¿Qué tal?

Valentina: Bien y usted.

Facilitadora: Bien por dicha.

Entonces, por ejemplo tenemos este ejemplo para ir entendiendo que son estrategias de conteo. El primero dice: “Hay tres bolas de tenis en una caja, ¿Cuántas bolas habrá en siete cajas?” Entonces no sé si alguien quiere ser Linda y otra quiere hacer la docente, para que no me oigan todo el rato y leemos este diálogo.

Daniela: Es leer algo profe.

Facilitadora: Sí.

Jimena: No lo vemos, no lo está compartiendo.

Facilitadora: Ay, perdón, perdón, perdón. Yo muy feliz, hable que hable. Esto lo que acabo de decir que, poco a poco el estudiantado cambia sus estrategias de modelado, que son más difíciles que para la suma y resta las de multiplicación y división, y que se tarda un poco más. Esa es la primera. Y luego este es el ejercicio entonces el problema lo que dice es que “Hay tres bolas de tenis en una caja, ¿Cuántas bolas habrá en siete cajas?

Jimena: Si quieres yo le ayudo.

Facilitadora: Claro. ¿Y quién más?

Facilitadora: ¿Quién quiere ser? Linda o la docente.

Jimena: Linda.

Facilitadora: Okay

Daniela: Yo, yo le ayudo, yo soy la docente.

Facilitadora: Okay.

Carmen: Buenas tardes, ya llegué nada más.

Facilitadora: Hola.

Carmen: Buenas noches digo.

Facilitadora: ¿Cómo le va?

Carmen: Bien, ¿y usted?

Facilitadora: Apenas estamos empezando.

Carmen: Es que andaba en la farmacia comprando una cosilla y entonces por eso me atrasé, mil disculpas.

Facilitadora: No se preocupe, con esta lluvia, es más complicado.

Vamos a leer este diálogo estamos pensando en estrategias de conteo, Carmen, cuando ya terminamos digamos cuando ya el estudiante madura un poco las ideas, ya pasamos de una etapa muy concreta del modelado a utilizar otro tipo de estrategias, entonces vamos a trabajar en cuáles son esas otras estrategias. Entonces vamos a oír este diálogo entre Linda y una docena.

Jimena: Dice (sube un dedo a la vez mientras cuenta. Al final siete tiene dedos arriba).

Facilitadora: Al final tiene siete 7.

Jimena: Si al final tiene 7 dedos arriba. Hay 21 bolas.

Daniela: Bueno yo soy la docente. Entonces, ¿puede decirme cómo encontraste la respuesta?

Jimena: Conté hasta 21.

Daniela: ¿Me puedes decir cuáles números dijiste?

Jimena: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21. (Para cada número dicho levantó un dedo)

Daniela: ¿Por qué terminaste en 21?

Jimena: Fui llevando la cuenta de los dedos.

Daniela: ¿Cómo llevaste esa cuenta?

Jimena: Yo pensé 3 (mostró un dedo), 6 (levantó el segundo dedo). Así continuó hasta levantar el sétimo dedo y entonces había contado hasta 21.

Facilitadora: Gracias. ¿Qué opinan de esto? ¿Lo han observado?

(silencio)

Jimena: Yo en realidad no.

Facilitadora: Perdón, adelante.

Daniela: Perdón. Yo estoy con la multiplicación iniciando con los chiquillos, verdad, entonces era de 4 cajas, 4 canastas tenían 12, no me acuerdo qué eran, pero eran 12, 12, 12, entonces una chiquita de una vez y ¿cuánto eran? Verdad eran  $12 \times 4$  entonces una chiquita de una vez levantó la mano y me dice son 48. Y le digo yo ¿y cómo lo descubrió? Entonces me dice: “Si cuento 10 más 10 más 10 más 10 son 40 y luego sumó 2 4 6 8 y  $40 + 8$  son 48 de una vez”. En la mente lo sacó.

Facilitadora: ¿Y nunca había visto eso?

Carmen: No es **Rojas** esa chiquita.

Daniela: Ni **Méndez** tampoco. Vieras que hábil y muchos están usando eso, entonces me pareció muy gracioso porque ya usted, verdad, ya lo hemos visto aquí en este curso.

Facilitadora: ¿Y usted lo está fomentando, esa forma de que sumen, o no, fue cosa del estudiante?

Daniela: Fue cosa de la estudiante. Entonces si digamos ya uno sabe que ya puede cómo motivarlos más. Entonces todos dijeron ah mirá cierto entonces de ahí yo aproveché y le expliqué que de decena en decena era mucho más sencillo.

Facilitadora: Qué interesante.

Daniela: Sí, sí, pero solita totalmente entonces fue muy bueno.

Facilitadora: Claro me imagino que se sintió super bien usted.

Daniela: Sí, sin duda

Jimena: Es como decía yo aquel día el detalle que uno de esos detalles no les tomaba importancia o no los, no los destacaba y ahora después de esto uno trata de ver las diferentes opciones o las diferentes formas que utilizan los chiquillos para resolver cualquier ejercicio, pero eso no le tomaba uno antes tanta importancia uno decía lo hizo, no lo hizo lo hizo bien, no, lo hizo mal, pero el ver esos detalles es algo que hemos aprendido creo yo.

Facilitadora: Qué bien.

Carmen: Sí, claro porque ya uno tiene un conocimiento de que ese proceso es importante. Uno lo sabía pero quizás no lo había ejercitado tanto como lo hemos hecho aquí.

Facilitadora: ¿Ustedes sí trabajan mucho secuencias numéricas, verdad, cuando suman de dos en dos, de tres en tres. Bueno, los ponen a escribir que complete en cómo series, verdad, con espacios? Que sé yo 2, 4, \_\_, 8, 10. ¿Eso sí se trabaja mucho, verdad?

Daniela: Yo sí lo trabajo con los chiquillos.

Facilitadora: ¿Y lo trabajan en conteo, no? Digamos pensando, no en escribirlo, sino a la hora de contar, ir contando de tres en tres, o de dos en dos, de cinco en cinco.

Claudia: Digamos en el caso mío cuando tengo sí. bueno en todos los grados pero principalmente cuando es primero y segundo sí. Iniciamos la clase de matemática bailando con los números, contando de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres, de cinco en cinco y haciendo ahí piruetas para que ellos se muevan e ir reforzando el conteo y como dice la niña Carmen y la niña Daniela también, el observar cuando los niños resuelven así, ya más detallado, uno como que dice: “de verdad, qué estamos haciendo, qué bonito como ellos están experimentando y al ir fomentándole a ellos que expliquen cómo llegaron ahí, también nos hacen más críticos y razonan más también el aprendizaje.

Facilitadora: Y podemos entender mejor cómo están pensando también verdad.

Claudia: Sí.

Facilitadora: Por ejemplo, tenemos yo creo que todos cometemos el error de que lo que queremos es una respuesta correcta. Por ejemplo  $12+4=48$  y ya estamos muy felices porque encontró la respuesta correcta, pero vea que Daniela aprovechó en ese momento la oportunidad, y otros estudiantes

aprendieron de esa pregunta, de que cómo lo había hecho tan rápido, y cómo lo hizo mentalmente. Entonces vale la pena como escarbar un poquito más en esta forma en que lo piensan. Entonces vean que esta estrategia la podemos utilizar para, digamos, con ejercicios de multiplicación aprovechando todo lo que se ha hecho ya en suma y resta, entonces vale la pena como no dejar esas secuencias y esas sucesiones, o como las llamen, no sólo para el principio en la suma sino también para ir las generando para algunos ejercicios de multiplicación.

Carmen: Yo quiero comentarles algo que me pasó hoy, que tengo un chiquito que le cuesta mucho calcular, razonar y vieras que hemos estado implementando porque ahí en el aula a ratitos, bueno hay un muchacho que está haciendo práctica y me pide de vez en cuando ayudarme con matemáticas. Y yo le dije que si era posible usáramos el algoritmo cuando haya que resolver sumas y restas pero que también esta otra forma y es bastante hábil y hoy un chiquillo me sacó así como que una cuenta. Me dice: “Profe, ¿es que cuántas veces cabe? Sí profe da perfecto, y yo, qué increíble, y un chiquito que le cuesta mucho.

Facilitadora: ¿Y cuál estrategia estaban usando para resolver, o qué fue lo que hicieron diferente?

Carmen: No, era una división, pero digamos es este asunto de cuántas veces cabe tal cantidad en la otra verdad y agarró hizo el montón de veces, profe es que quiero ver si cabe cinco veces, profe, ayúdeme, corrobóreme aquí que cabe cinco veces, y ya lo hicimos. El compañero lo que hace es exactamente como ir descomponiendo las cantidades para calcular y todo, y el chiquillo sacó el cálculo bastante bien. Vieras que era un cálculo como alto. Tengo que buscar ese ejercicio para ver si le tomo una foto.

Facilitadora: ¿Usted tiene trabajo del estudiante?

Carmen: Perdón.

Facilitadora: ¿Usted tiene el trabajo que hizo el estudiante?

Carmen: Pienso que sí, no le tomé fotos hoy, pero puedo llegar a revisarlo, no lo tengo aquí, pero puedo buscarlo para próximas sesiones.

Facilitadora: Sí, claro. Entonces con respecto a las estrategias de conteo para multiplicación y división estas son, como les decía antes también, implica un conocimiento conceptual más avanzado que en la suma, es más difícil.

Vean por ejemplo, en este que acabamos de hacer, ella pone un dedo para las primeras tres bolas, entonces cuando ya levanta ese dedo no representa a uno, sino que ella está pensando en una caja con tres bolas, por eso es un proceso más complejo. Además, el cerebro tiene que pensar más porque ella va levantando los dedos, va contando de tres en tres y ella tiene que llevar además la cuenta para saber que tienen que llegar hasta siete. Entonces vean que si es un poco más difícil, pero, bueno, es posible que lo logre y una cosa interesante y, creo que todos lo sabemos, es que obviamente si lo hacemos de dos en dos, de tres en tres, o de cinco en cinco es más fácil que si, por ejemplo, ya lo tienen que hacer de 7 en 7. Y al rato es culpa también de nosotros porque tal vez le damos importancia a algunas secuencias y no a otras cosas. Tal vez sea más común contar de dos en dos, o de tres en tres

que contar de 8 en 8, no sé. Ustedes me dirán si trabajan con varias opciones o ¿si se concentran más en algunas?

Jimena: Creo que definitivamente de dos en dos, de cinco en cinco, y de diez en diez digamos personalmente, que es lo más práctico, lo más fácil, y lo que ellos manejan mejor y uno a veces por no complicarse no utiliza otras secuencias u otras series.

Facilitadora: Y entonces tal vez desarrollar cierta habilidad con otros números que no sean, entre comillas, tan fáciles, como de siete en siete les puede ayudar también para usar esa habilidad después cuando están haciendo ejercicios de multiplicación o división.

Okay, aquí hay otra opción diferente dice “La docente tiene 5 planas de calcomanías y cada una de las planas tiene cuatro. ¿Cuántas calcomanías tiene la docente?” Esa es una estrategia que usó un estudiante. Entonces dice: 4, 8, 12 y luego cuenta 13, 14, 15, 16 se quedan un momento pensando y luego sigue contando hasta 20. ¿Por qué creen que el estudiante lo hizo de esta forma?

(silencio 15:00)

Claudia: Creo que se ve que se refleja la falta de reforzar el conteo en otros números porque vea que estamos usando de cuatro en cuatro.

Facilitadora: ¿Y qué pasó entonces?

Claudia: Cuando llegó a 16 ya no sabía, bueno, casi que a 12, ya se le complicó.

Facilitadora: Después de 12 ya no supo cuál era el número que seguía en la secuencia, pero sí lo entiende digamos. Ella tiene claro que tiene que sumar cuatro más y luego otra vez cuatro más, pero sí...

Carmen: Los contó en grupos. Perdón, los contó en grupos hasta el 12, agrupó hasta el 12 en puñitos de 4 y ya después de ahí se fue de 1 en 1.

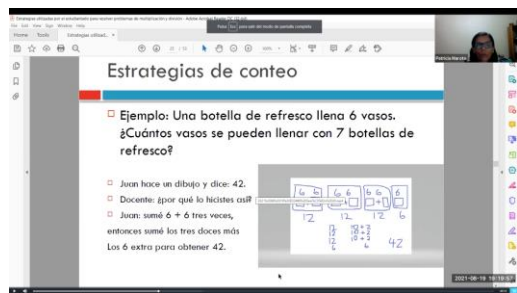
Facilitadora: De 1 en 1, pero siempre teniendo en cuenta que eran cuatro en cada grupo, pero sí, como dice Claudia, el problema es que probablemente no sabía que seguía después de 12 de manera clara. Este es otro, otro ejemplo ya es una estrategia de conteo, pero pensando más en un dibujo, o sea como la razonó un estudiante. Dice: “Una botella de refresco llena seis vasos. ¿Cuántos vasos se pueden llenar con siete botellas de refresco?” Entonces ahí está la explicación de cómo la hizo Juan. Juan hace un dibujo y dice 42. Ese es el dibujo que hizo Juan, entonces la docente le pregunta que le explique por qué lo hizo así. Entonces Juan explica sumé  $6+6$ , 3 veces, sume los 3 doces más los 6 extra para obtener 42. Y vean todo lo que escribió. ¿Cómo la entienden? ¿Cómo entenderían todo ese montón de números, dibujos y cálculos?

(silencio)

Sesión 20

Hora: 59:26

Fecha: 19/08/21



Carmen: Diay, profe, dibujó...Cada cuadrito representan las botellas, puso arriba cuanto llena cada botella y después las agrupó dos en dos y la otra quedó sola porque era número impar, y después los doce que unió por cada dos botellas lo fue separando para sumar en 10 más 2, en 10+2, y así, y el 6 quedó solito

Facilitadora: Vean que usó un montón de cosas, usó representación gráfica, luego agrupó de dos en dos, como decía

Carmen, 6+6 y después vean que al final usó la estrategia que estaba mencionando Daniela antes. Tengo que

sumar 12+12+12 entonces lo más fácil es sumar las decenas, sumó tres decenas y me quedan 6. Aquí no está claro cómo sumó esos 6+6 verdad o cómo sumó 2+2+2+6 pero probablemente, por ejemplo, podría ser 6+4=10 y 2 son 12 o 6 y 6=12 y ahí puede usarse cualquier otra estrategia que conozcan de suma y resta.

Aquí hay otro ejemplo. Ahora este es para división cuando estamos trabajando en los casos de problemas con división de medidas. Entonces dice: “Un restaurante puso cuatro porciones de queso en un emparedado. ¿Cuántos emparedados se pueden hacer 24 porciones de queso?” Usan cuenta 4, 8, 12, 16, 20, 24. Y cada vez que cuenta un número, extiende un dedo, cuando termina se da cuenta que tiene seis dedos extendidos y entonces se da cuenta que son 6, que puede hacer 6 emparedados. Vean que aquí estamos usando conteo para un ejercicio que era una división, entonces no necesariamente siempre tenemos que usar un algoritmo o colocarlo, o qué sé yo, para hacer la operación, sino que aquí usando conteos se puede encontrar; sumando, sumando y sumando de cuatro en cuatro hasta que llegó al número total en este caso. ¿Hay algún comentario?

(silencio)

Carmen: Que ahí se ve la relación de división con la multiplicación.

Facilitadora: De la división con la multiplicación también verdad y con la suma. Exactamente. Entonces vean que aquí el problema que tenemos es que el número de objetos. Ah bueno, en división por partes vamos ahora, en división en partes.

Aquí el número de objetos es el que es desconocido, o sea, yo sé cuántos conjuntos tengo que en el caso anterior era el número sándwiches lo que no sabíamos, ahora es el número de objetos en cada uno es como no saber cuántos pedazos de queso le pusieron, se conoce el número de grupos y el número total y como no sé el número de objetos, entonces tienden a veces a utilizar la estrategia de ensayo y error porque no tienen seguridad de cómo... No es como antes que es de cuatro en cuatro el queso sino que aquí el problema es un poco diferente. Entonces dice: “Hay 24 niños y niñas en la clase. Queremos dividir la clase en 6 grupos con el mismo número de personas en cada grupo”.

Entonces por eso es división en parte. Sabemos cuántos grupos, sabemos el total de personas, pero no tenemos cuántas personas van a haber en cada grupo, que es la pregunta.

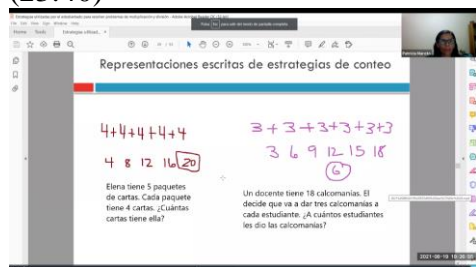
Por ejemplo, aquí Susan cuenta: 3, 6, 9, 12, 15, 18. Entonces usa una estrategia parecida a la que acabamos de ver en el queso, pero en el queso sí sabíamos el número de porciones, aquí no sabemos. Cada vez que cuenta va, igual, levantando un dedo, para darse cuenta que al final tiene seis dedos levantados, pero se da cuenta que llegó hasta 18 y son 24 personas. Entonces por eso se llama ensayo y error porque no sabemos cuántas personas. Susan inventó un número, digámoslo así, con ese prueba. Como no le funciona, entonces decide hacerlo de cuatro en cuatro 4, 8, 12, 16, 20, 24 entonces otra vez tiene que llevar la cuenta de cuántas veces está sumando el 4. Nuevamente puede ser con los dedos y aquí se da cuenta que cuando cuenta la sexta vez, cuando llega a 24, tiene seis dedos extendidos y ya logró el total de personas que tenían en el problema. Otra vez es conteo, verdad, de cuatro en cuatro en este caso, pero como no sabe la cantidad de elementos tiene que inventar un número, probar y darse cuenta; qué sé yo, por ejemplo, si hubiese escogido 5, se da cuenta que tiene 30 entonces se pasó, entonces tiene que escoger un número menor y así sucesivamente.

Aquí hay otros dos ejemplos también, dice el primero “Elena tiene siete paquetes de cartas, no, perdón, cinco paquetes de cartas, cada paquete tiene 4 cartas. ¿Cuántas cartas tiene ella?” y el otro dice “Un docente tiene 18 calcomanías. Él decide que va a dar 3 calcomanías a cada estudiante. ¿A cuántos estudiantes les dio calcomanías?”

¿Qué ven de diferente en estos problemas, en estos dos problemas? y ¿qué ven de diferente o parecido en las soluciones?

(silencio)

(23:40)



Carmen: De parecido que es una suma sucesiva.

Facilitadora: En ambos casos. ¿Los dos problemas son del mismo, de multiplicación o de división o son diferentes?

¿?: No, uno es de división y otro de multiplicación.

Facilitadora: A pesar de que son de diferentes, digamos en principio, estoy pensando que uno es una multiplicación el otro es una división, estamos usando una estrategia de conteo similar, en ambos casos yo sé el número de elementos en cada conjunto, en el lado izquierdo usé el número de cartas en cada paquete, en el lado derecho sé cuántas calcomanías le van a dar cada persona. ¿Qué relación o qué diferencia o en qué se parece esta cuenta de que bajó con respecto a esta? (silencio, 25:17)

¿Ustedes piensan que lo hicieron de la misma forma? (silencio)



Carmen: Bueno, es que en realidad el de la izquierda es para obtener un número, una cantidad, que sea la respuesta. En cambio ahí más bien es, de acuerdo con la cantidad de grupitos que pudo hacer, dio la respuesta. En el de la derecha.

Facilitadora: ¿Qué es lo que el estudiante cuenta cuando hace el de la izquierda? O sea ¿cuál es la cuenta que lleva? Va contando 4, 8, 12, ¿cómo sabe dónde terminar? Porque el 20 no lo sabía.

Carmen: Porque al sumar da 5 números.

Facilitadora: Tiene que contar cinco veces 4:  $4+4+4+4+4$  cinco veces, entonces cuando llega a la quinta vez, esta es la quinta vez, esta es la cuarta, esta la tercera y así. Ahí se da cuenta que hay 20 cartas, como ese diferente de este, aquí fue contando también 1,2,3,4 ¿así empezó o no?

Carmen: Sí, igual 18.

Facilitadora: Pero en este lo que hace es contar digamos 3, 6, 9, 12, 15 y 18 sabe que termina cuando llega a 18, pero podría ser que de una vez vaya contando cuántos grupos tiene o que nada más escribe los números y después se da cuenta que hizo, que contó seis veces el 3. Podría ser un poquito diferente...

Claudia: Yo creo que ahí, en el segundo yo creo que él hizo así: él fue contando digamos 3, fue dividiéndolo porque sabía él que tenía que dar tres y como tenía 18 entonces como haciendo grupitos tres y tres son seis y tres son 9 y después contó cada uno, nada más que no los encerró ahí.

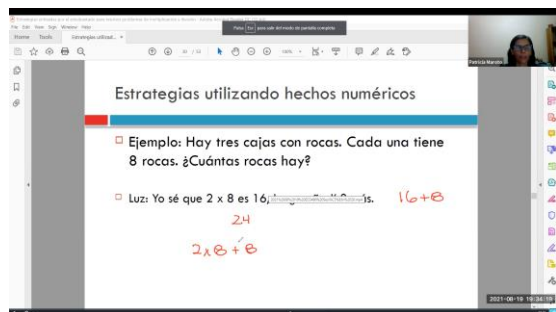
Facilitadora: Sí, lo que determinó fue que tenía 1, 2, 3, 4, 5, 6 grupos. En cambio, aquí tal vez no escribió el 5 digamos que eran 5 veces, pero sí de alguna forma llevó la cuenta para saber que se tenía que terminar aquí en 20. Entonces vean que a veces, aunque la estrategia se vea muy parecida, a la hora de verla escrita, dependiendo del problema podría tener un significado diferente. Pero también si le preguntamos al estudiante, probablemente nos demos cuenta de que tal vez no es lo que nosotros estamos pensando, sino que lo interpretó de otra manera porque puede haber varias formas de analizar la situación.

Este es otro ejemplo dice: “hay tres cajas con rocas cada una tiene ocho rocas. ¿Cuántas rocas o piedras hay?” Esta estudiante, que se llama Luz, hizo una estrategia muy diferente a lo que hemos estado haciendo. Lo que hizo fue, vean que aquí, esta la llamamos con hechos numéricos. Hechos numéricos. Recuerden que pueden ser las tablas de multiplicar, o sea son cosas que ya ellos han aprendido. Por ejemplo saben que  $8+8=16$  o que dos por 8 son 16. Estamos usando algunos conocimientos previos de las cosas que ellos han ido logrando memorizar con respecto a algunas operaciones. Por ejemplo, en este caso ella dice yo sé que por 2 por 8 son 16 y luego añado 8 más, entonces ya puede establecer que son 24. Primero multiplica por 2, porque es lo que recuerda y luego le suman los 8 de alguna forma, habría que ver también de qué manera suma  $16+8$ . Ahí hay muchas formas igual de hacerlo puede sumar  $10+8$  primero y luego le suma dos o saber que  $8+6$  son 14, qué sé yo. Veamos que aquí hay una mezcla, veamos que aquí en realidad si uno lo analiza, el estudiante no lo va a escribir así o ella, en este caso no lo va a escribir. Difícilmente lo va a escribir de esta forma, pero en el fondo lo que está haciendo es una combinación de operaciones porque está primero multiplicando y después haciendo la suma.

Sesión 20

Hora: 59:26

Fecha: 19/08/21



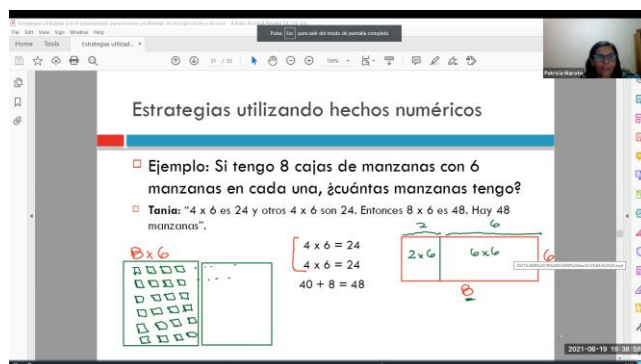
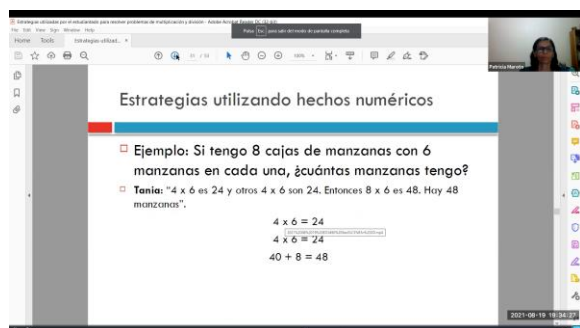
Esta dice: “Si tengo 8 cajas de manzanas con 6 manzanas en cada una. ¿Cuántas manzanas tengo?” También de ese  $4 \times 6$  son 24, otros  $4 \times 6$  son 24 entonces  $8 \times 6$  son 48. Hay 48 manzanas y ahí está una posible explicación de cómo lo podría haber resuelto.

Aquí la operación en principio era esta,  $8 \times 6$ , vean esta idea de que si yo tengo 8 veces 6. yo lo puedo escribir con 4 veces 6 dos veces y sigue siendo la misma cantidad, la respuesta es igual. Y aquí vean, que otra vez, estamos viendo la estrategia que antes decía Daniela sumó  $20 + 20$  son 40 y luego sumó las unidades, para encontrar el resultado. Vean que esta idea de  $8 \times 6$  separándola en  $4 \times 6$  y  $4 \times 6$  es una idea que tampoco es así como inmediata, hay que trabajarla, y darse cuenta de que por ejemplo... Una opción sería, ya lo habíamos hecho en algún momento cuando vimos estrategias de multiplicación, o se puede hacer con cubos también en el sentido este; digamos que tenemos este rectángulo o podemos hacerlo con cubitos, colocando 8 cubos para un lado y 6 para el otro entonces digamos que este mide 6 y este mide 8, entonces yo podría trazar el punto medio, buscar la mitad de ese rectángulo y decir que este de aquí, es  $4 \times 6$  el área, y este otro es  $4 \times 6$ . Esta podría ser una forma de ver que  $8 \times 6$  es dos veces cuatro por seis y como les digo tal vez no sea como muy eficiente pero podríamos pensarlo con cubitos. Tenemos 8 y una fila de seis por ejemplo hacia abajo que sean seis filas y ocho columnas, podemos ir construyendo esta idea de que 8 por 6 puede ser... Aquí falta una todavía. No voy a dibujar los otros, pero imagínense que aquí están los otros cuatro que faltan. Al final tenemos aquí, estos de aquí, serían el  $4 \times 6$  y la otra mitad de aquí sería otra vez  $4 \times 6$ . Vean que hay diferentes formas de ir construyendo esa idea de que el número... Inclusive en este lado izquierdo en lugar de  $4 \times 6$  y  $4 \times 6$ , yo podría por alguna razón decidir que mejor quiero, que sé yo, 2 y 6. O este mismo del arreglo rectangular lo podemos trabajar así también. Digo aquí este es  $2 \times 6$  y este 6 x 6. Lo que estoy haciendo es este de aquí son dos unidades y este de aquí son 6 unidades. Entonces el rectángulo de aquí mide  $2 \times 6$  y este de aquí mide  $6 \times 2$ , ven que aquí estamos usando diferentes formas de descomponer el 8 para utilizar algunas operaciones que ya conozco, digamos, tal vez la persona sepa  $2 \times 6$  entonces bueno podría ser  $2 \times 6$  cuatro veces también  $12 + 12 + 12 + 12$  podría ser otra forma de resolver ese ejercicio. No sé si se les ocurre alguna otra opción. (silencio 35:25)

Sesión 20

Hora: 59:26

Fecha: 19/08/21



Carmen: Pues ahorita no se me ocurre ninguna.

Facilitadora: Aquí hay una segunda. Es el mismo ejercicio. Esto que está aquí arriba es lo mismo de Tania es exactamente lo mismo que acabamos de analizar. Ahora María propone otra opción. Dice: “Yo lo hice diferente y también obtuve 48. Yo sé que 6 veces 6 es 36 y dos veces 6 es 12, entonces 8 veces 6 es 36 + 12 y 36 + 12 son 48. Bueno es el ese es el que acabo de representar en el dibujo, pero por ejemplo en este caso María, ella ya no necesita el dibujo, sino que ya lo tiene claro, sabe que el 8 por 6 lo puedes separar en 6, 6x6 y 2x6 y va obtener el mismo resultado que si hace 8 por 6. Y aquí hay una tercera opción que es el mismo problema nada más que ahora Jorge dice: “Yo sé que ocho veces 3 es 24. Otros 8x3 son 24. Si sumo los dos es lo mismo, porque 3+3 es 6. 24+24 es igual a 48 manzanas”.

¿Cómo podríamos representar esta situación que plantea Jorge con un dibujo? (37:04)

Carmen: Con los rectángulos puede ser.

Facilitadora: Sí, sí, ¿cómo quedaría? ¿Cómo es diferente al de antes?

Carmen: (inaudible)

Facilitadora: Esos eran los 2 de antes. Ahora es 8 x 3. ¿En el dibujo cómo se vería eso diferente?

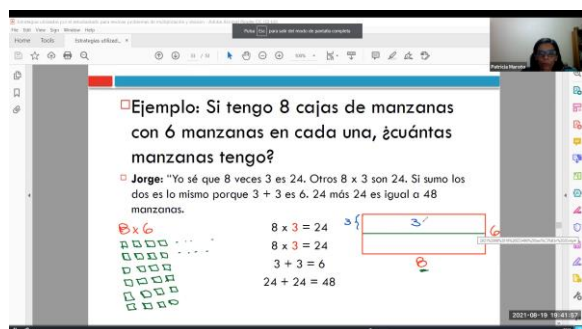
Carmen: Sí, 8 de largo y 3 de ancho, en los rectángulos.

Facilitadora: Ahora sería, en lugar de dividirlo de manera vertical, lo divido a la mitad, de manera horizontal, exacto, Y entonces ahí cada uno de estos rectángulos tendría ahora, esta altura mide 3 y el ancho sigue haciendo 8 entonces 3x8 y 3x8. ¿Y en el arreglo rectangular, cómo lo veríamos?.

Sesión 20

Hora: 59:26

Fecha: 19/08/21

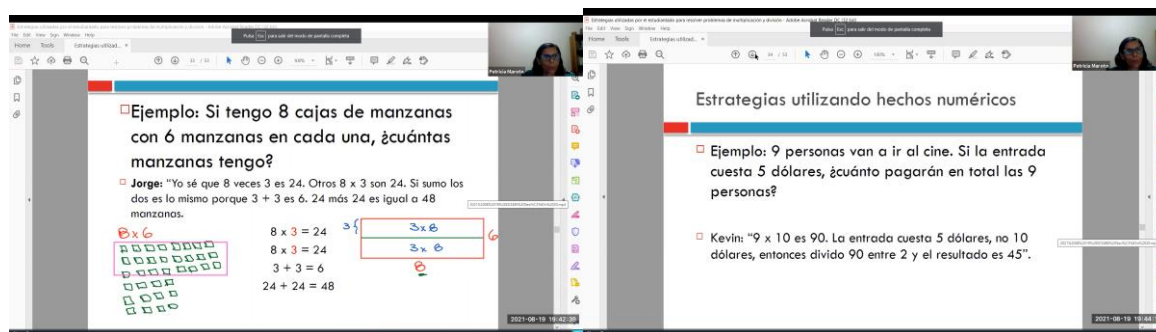


Carmen: Ocho dibujitos y tres filas.

Facilitadora: Escogería toda la fila, exacto y cogeríamos 3 filas. Entonces serían estos  $8 \times 3$  y luego haríamos lo mismo con aquí abajo con estos otros  $8 \times 3$ . Y vean que aquí, lo que hay que tener claro, es que al final estos dos números, estos dos veces  $8 \times 3$  son los que me definen el resultado de lo que estamos haciendo. Es  $3+3$  son 6, que sería lo mismo que el número de manzanas por caja. Por eso aquí la suma para darse cuenta que si es 6 y luego suma de cualquier forma  $24+24$ .

Este dice: “9 personas van a ir al cine. Si la entrada cuesta cinco dólares, ¿cuánto pagarán en total las nueve personas? Entonces Kevin dice yo sé que  $9 \times 10$  son 90. La entrada cuesta cinco dólares, no 10 dólares entonces dividido 90 entre 2 y resultado es 45”. ¿Esa piensan que sus estudiantes podrían usarla?

Carmen: Muy avanzado el estudiante sí y con mucha capacidad de abstraer, pero lo usual no sería.

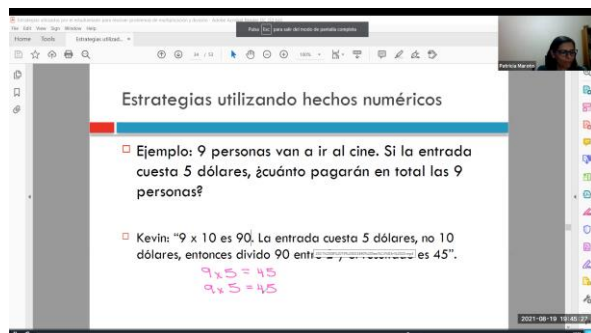


Facilitadora: Tal vez si se trabaja un poco con material concreto sea más fácil que lo vea. Porque aquí está involucrado el concepto de decena.  $9 \times 10$  es una operación que es muy muy sencilla o  $7 \times 10$  o cualquier número por 10 en realidad después de cierto tiempo es algo muy simple. Entonces considerar a la mitad de ese resultado, es más fácil, digamos, sacar la mitad de 90 que ponerse a hacer  $9 \times 45$ , dependiendo de la habilidad que tenga el estudiante. Esta podría ser una opción. Vean que el reto es muy grande porque cuando se trabaja con las decenas debería construirse estos otros conceptos. Por ejemplo qué  $9 \times 5$ , que sé yo, que si tengo  $9 \times 10$  también es  $9 \times 5$  y  $9 \times 5$  y entonces luego poder establecer que la mitad de 90 son 45, porque aquí tendríamos 90 dividido a la mitad, por ejemplo.

Sesión 20

Hora: 59:26

Fecha: 19/08/21



Jimena: Pero creo que ellos usarían siempre ir de lo más sencillo, de lo más bajo hacia arriba. No creo que ellos utilicen ir al número más alto y luego bajar, yo creo que es al revés. Ellos usan de lo más sencillo y para ellos es más sencillo números más bajos creo yo.

Facilitadora: Por ejemplo, ustedes mismas. Si tenemos que multiplicar algo por 500 digamos que yo tengo que multiplicar 18 por 500, ¿alguna vez se han puesto a pensar en hacerlo fácil, sin poner a hacer mucho?  $18 \times 500$ , para no hacer  $18 \times 5$ , ¿cómo podrían hacerlo?, (silencio) ¿o nunca lo han pensado? Por ejemplo, yo si tengo que hacer esa, bueno realidad yo lo hago más simple, pero digamos uno puede decir  $18 \times$  mil yo sé que son 1800, entonces uso el doble de 500 esto es muy fácil, yo sé que es, bueno más bien 18000 y luego, o por 50, digamos, como sea, no importa,  $18 \times 1000$  son 18 mil y luego calculo la mitad, y la mitad son 9 mil. Por ejemplo, antes cuando el dólar valía 500 colones, entonces uno también podía decir bueno es la mitad de... o sea le agrego 2 ceros a esto y saco la mitad. Entonces si yo tenía 500 dólares entonces yo decía 1800 dividido entre 2 son 900.

Daniela: Profe, también podría ser, perdón, podría ser  $20 \times 500$  entonces ya me daría 2 por 5 ya serían 10, 10 000 Como ya le agregué 2, me queda más fácil quitarle 1000.

Facilitadora: También, muy bien Daniela.

Carmen: A mí el otro día se me hizo un enredo, se acuerda profe, con una cantidad que se va haciendo así redondeada, se me hizo un colocho que tuve que recurrir a usted.

Facilitadora: Sí es que siempre, si uno empieza a pensar en esto y a darle vueltas y a jugar con los números, va descubriendo muchas cosas interesantes, pero también a veces no es tan claro por qué funciona o si está bien o está mal, verdad. Sí Daniela, esa está muy bien, también. Si tienen 500 o 5000 a veces es más fácil multiplicar por 10 mil por ejemplo si tiene 5 mil multiplican por 10 mil y luego obtener la mitad.

Aquí hay otra estrategia, también usando algunos resultados previos. Dice: “Alana recogió 56 dólares en su cumpleaños. Ella quiere utilizar ese dinero para comprar libros. Si cada libro cuesta 7 dólares, ¿cuántos libros puede comprar?” Evelyn resuelve el problema y dice: “tres veces 7 es 21, otra vez 3 veces es 21,  $21 + 21$  es 42, entonces necesito, mmm, 14 más. Entonces vean que un montón de cosas hay que saber, sabe que si le suma 14 más llega a 56 y de alguna forma tiene que saber que estos 14 son los que le hacen falta. Y entonces después dicen que 14 es dos veces siete. 3 veces 7 más 3 por 7 más 2 son ocho veces 7. Eso significa que 8 veces 7 son 56 y entonces al final determina que puede comprar ocho libros. La docente le dice: “No entendí lo que dijiste”. Porque vean que montón de

Sesión 20

Hora: 59:26

Fecha: 19/08/21

cosas dijo aquí, pero bueno aquí está la explicación, yo la hice aquí, pero digamos que en la simulación la estudiante lo que hizo fue esto 3 veces 7 son 21, 3 veces 7 son 21, después dijo que  $21+21$  son 42. Se da cuenta que le faltan 14, entonces de alguna forma ya sabe que  $42+14$  son 56 y que  $2 \times 7$  son los 14 que le hacen falta. Vean que lo que hace después es sumar este 3 que es un tres veces 7, 3 veces 7 y 2 veces 7 para determinar cuántas veces multiplico por 7 y de esa forma determina que son 8.

The image shows two side-by-side screenshots of a virtual classroom interface. Both windows display a document titled "Estrategias utilizando hechos numéricos".

The left window shows a text-based problem: "Ejemplo: Alana recogió 56 dólares en su cumpleaños. Ella quiere utilizar ese dinero para comprar libros. Si cada libro cuesta 7 dólares, ¿cuántos libros puede comprar?". Below the problem, there is a list of student responses. One response from "Evelyn" is highlighted: "3 veces 7 es 21, otra vez 3 veces 7 es 42, entonces necesito, ummm, 14 más para llegar a 56. 14 es 2 veces 7. 3 veces 7 más 3 por 7 más 2 por 7 son 8 veces el 7. Eso significa que 8 veces 7 es 56. Ella puede comprar 8 libros." A teacher's response follows: "Docente: No entendí lo que dijiste".

The right window shows a student's handwritten work on a digital whiteboard. It includes the same problem text and a series of calculations:  $3 \times 7 = 21$ ,  $3 \times 7 = 21$ ,  $21 + 21 = 42$ ,  $42 + 14 = 56$ ,  $14 = 2 \times 7$ , and  $2 \times 7 = 14$ . A final calculation shows  $3 + 3 + 2 = 8$ . To the right of these calculations, there is a text explanation: "Evelyn: Estaba tratando de entender cuántas veces 7 es 56. No sabía, pero si se que 3 veces 7 es 21. Entonces si tiene 21 dólares puede comprar 3 libros. Con otros 21 dólares compra otros 3 libros y le quedan 14 dólares. 2 veces 7 es 14, entonces puede comprar 2 libros más. 3 más 3 más 2 es 8."

Carmen: Profe a una pregunta entonces tengo una la duda que me asalta. Por ejemplo, digamos, aunque no sea en resolución de problemas uno con los niños que están así pequeñitos, con los estudiantes, uno podría como ponerlos a jugar por este tipo de ejercicios digamos  $3 \times 7 = 21$ , entonces uno se los pone ahí repetido y uno dice bueno entonces ¿cuánto será 21 y 21? para que tal vez ellos vayan agrupando y desagrupando y experimentando con eso, tal vez no necesariamente con un problema, ¿cómo lo ve usted? ¿lo recomendaría?

Facilitadora: Por supuesto, claro que sí, sí claro. Inclusive se me ocurren como todos los días tirarles un reto, ir subiendo la dificultad, decirles bueno, ¿cuánto es  $21+21$ ? Luego decirle cuántos es  $26+26$ ? que tiene un poco más de dificultad, pero entonces sí de alguna forma motivando el uso de más cálculo, y que lo entiendan, como hemos estado hablando por mucho rato, verdad y que no sea que usted le dijo sume las decenas y luego sume las unidades sino que de alguna manera encuentre una forma, que pueda hacer el cálculo rápido y bien hecho y que se sienta bien porque lo entendió. Claro que sí, no tienen que ser sólo problemas, pueden ser estrategias. Usted de nada más le dice bueno encuentre cuánto es tanto más tanto o tanto por tanto y que lo haga como pueda, con un dibujo. Vea que esto si lo vemos desde el punto de vista matemático, esta no es la mejor forma de escribir esta secuencia lógica de operaciones, para encontrar el resultado, pero sí está muy claro qué fue lo que hizo el estudiante o la estudiante. Si yo veo esto, puedo entender claramente qué fue lo que pensó y cómo lo razonó, por supuesto y puede trabajarlo sin problemas. Claro me parece que es una buena idea.



Sesión 20

Hora: 59:26

Fecha: 19/08/21

Estrategias utilizando hechos numéricos

$3 \times 7 = 21$   
 $3 \times 7 = 21$   
 $2 \times 7 = 14$   
 $3 + 3 + 2 = 8$

Evelyn: Estaba tratando de entender cuántas veces 7 es 56. No sabía, pero sí sé que 3 veces 7 es 21. Entonces si tiene 21 dólares puede comprar 3 libros. Con otros 21 dólares compra otros 3 libros y le quedan 14 dólares. 2 veces 7 es 14, entonces puede comprar 2 libros más. 3 más 3 más 2 es 8.

Carmen: Sí, para que ya cuando se encuentren con el problema escrito ya hayan manipulado las situaciones, ese hecho de componer y descomponer.

Facilitadora: Claro. Sí, que no sea una doble situación, que tiene que comprender el problema y al mismo tiempo aprender a usar la estrategia de cálculo. Sí claro, podría ser bien útil hacer eso.

Bueno aquí no leí esto, pero digamos esta es la explicación. Como la docente le dijo a Evelyn que no entendía cómo lo había hecho, entonces ella lo explica de otra forma. Entonces dice: “Estaba tratando de entender cuántas veces 7 es 56. No sabía, pero sí sé que 3 veces 7 es 21. Entonces si tiene 21 dólares puede comprar 3 libros”. Entonces vean que aquí ya lo razona no tanto con ese monto de números que dijo antes, sino lo que razona es bueno, si tengo 3 tres veces siete, tengo 21 dólares y me compro tres libros, con otros 21 dólares de compro otros tres libros y luego con dos veces siete me compro dos libros. Al final sabe que aquí tiene un poco más de contexto el problema. Dos veces 7 es 14, entonces tres libros + tres libros + dos libros es ocho. Vean que aquí hay un poco más de contexto ya no sólo repetir  $3 \times 7$ , más tres por siete, más dos por siete, sino que hay un poco más de explicación de por qué porque al final son 8 libros.

Aquí vienen algunas con respecto a eso, que hablábamos antes, de multiplicar por 3, multiplicar por 5, multiplicar por 7. Aquí vienen algunas ideas que podrían ser interesantes para reflexionar un poco desde lo que ustedes ven en la práctica.

Dice: “cuando multiplican por 3, reconocen que tres grupos de cualquier número es lo mismo que dos grupos de ese número más un grupo más. Si yo tengo que multiplicar tres por siete, entonces tal vez saben  $2 \times 7$  y le suman luego siete. Bueno si son tres grupos de siete, yo tengo dos grupos de siete más otro grupo siete, por ejemplo. Esto tiene que ver con lo que usted acaba de proponer Carmen, que tal vez si ya saben la tabla del 2, pero no se saben en la tabla del 3. Cómo si no sé cuánto es  $7 \times 3$  lo puedo obtener a partir de la que sí sé, que es dos veces 7, 2 veces 7 más siete sería el mismo que tres veces 7. Otra cosa importante aquí es que a veces no reconocen que tres veces un número es lo mismo que el número tres veces, entonces tal vez pueden en hacer  $3 \times 7$  tal vez pueden hacer  $7 \times 3$ , pero no pueden hacer la relación de que  $3 \times 7$ , digamos que el resultado de 7 por 3 y el resultado de 3 por 7 es lo mismo, esa propiedad conmutativa no es algo que sea muy fácil de que la gente lo entienda y lo utilice.

Cuando multiplicamos por cuatro, entonces podríamos otra vez hacer uso la tabla del 2 o sea si ya el estudiante sabe muy bien multiplicar por 2 entonces si yo tengo que multiplicar, por ejemplo 4 por 7, yo puedo decir, bueno, yo sé que es dos veces 7 es 14 y luego les sumo otra vez 2 veces 7 o multiplico el 14 por 2 y obtengo que es 28. Entonces, usar el doble, calculo una multiplicación que sí puedo hacer y luego calculo el doble ese número, o lo sumo, como sea que lo quieran hacer. Eso puede ayudar a cuando estamos multiplicando por cuatro.

Luego si multiplicamos por 5 lo que se ha observado es que pueden contar de cinco en cinco. Si tienen cinco veces 7 o 7 veces 5, entonces van 5, 10, 15, 20, van contando de 5 en 5. Y una cosa que otra vez tiene relación con la propiedad conmutativa es que si tienen 7 veces 5 entonces van contando de 5 en 5, entonces dicen 5, 10, 15, 20, pueden ir contando de cinco en cinco hasta que lleguen a 35. Pero resulta que cuando tienen cinco grupos de siete, cuando la tienen al revés, entonces, nuevamente no es tan fácil ver, que podrían hacerlo siete por cinco en lugar de 5 por 7 y lo que tienden a usar es que  $7+7+7+7$  y como decíamos antes, sumar de 7 en 7 ya no es algo que practiquemos mucho, entonces es más difícil. Es muy importante siempre construir esa idea de la propiedad conmutativa para las multiplicaciones y para las sumas también, de manera de que si ya ellos saben un resultado, puedan pensar en el otro. Pensamos en todas las multiplicaciones, desde  $1 \times 1$  hasta todas las posibles hasta  $10 \times 10$ , si uno las escribiera, se da cuenta, por ejemplo, si tuviera  $2 \times 5$  voy a hacerlo más bien, en algún momento habíamos visto esta tablilla. Si yo tengo, pensemos que es una tabla, entonces uno por uno, la del uno todos los números siguen siendo igual, pero por ejemplo si yo tengo dos por tres son seis y tres por 2 son 6,  $4 \times 2$  son 8, y  $2 \times 4$  son 8. Al final si uno se fija, toda la mitad de la tabla de arriba es igual a la mitad de la tabla de abajo. Aquí en el centro está el 4, va a estar 9, 16, qué sé yo, los números de la diagonal son los números que es el número por el mismo,  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ , y los números que tengo en la parte superior son iguales que los números que tengo aquí en la parte inferior. Bueno aquí es un 3, perdón, tres por uno y aquí es un 6. Por ejemplo, aquí va a quedar 6 y 6, 3 y 3, 4 y 4 y si uno construye toda la tabla se da cuenta. Cuando se está tratando de memorizar algunos resultados es muy importante esta propiedad conmutativa, si ya sé 7 por 5 o 5 por 7 puedo encontrar el resultado también cuando tengo los números escritos en el otro orden.

Bueno para cerrar un poco con esto de la propiedad conmutativa y terminar, porque ya son los 8, qué barbaridad, otra vez la idea de que hay que comprender muy bien esta propiedad es más fácil comprenderla para suma que para... aquí es multiplicación, aquí no es resta sino para multiplicación. Si es más fácil para un estudiante entender que dos más tres son 5, 2 más 3 son 5 y que tres más dos son 5, que entender que dos por tres son seis y que tres por dos da lo mismo, eso también hay que considerarlo. Y, para los niños muy pequeños, eso no es tampoco muy viable, hay que irlo trabajando poco a poco, madurar la idea, y bueno, luego vamos a ver que eso es más fácil de analizarlo cuando se está trabajando con la idea de áreas o arreglos, es cuando es más fácil trabajarlo.

Entonces la próxima semana trabajamos con esa idea, yo en esta presentación ya metí los, bueno nos quedan como 13 diapositivas de esta parte de división, pero aquí las últimas son unos ejemplos que me había mandado Carmen, que quería que igual los analicemos en su momento. Si alguien tiene de aquí a la otra semana algunos de división o de multiplicación que quiera compartir de alguna solución, me las mandan y las trabajamos la otra semana. Y estaríamos por hoy.

Muchísimas gracias, que pasen muy buenas noches.



Sesión 20

Hora: 59:26

Fecha: 19/08/21

Relaciones comunes utilizadas por el estudiantado al usar hechos numéricos

- Multiplicar por 5.
  - A veces pueden contar de 5 en 5.
  - Es más fácil que entiendan el 5 como el número de elementos del grupo que cuando es el número de grupos.
  - Ejemplo: 7 grupos de 5.
    - Usan por ejemplo:  $7 \times 5 = 6 \times 5 + 5$
    - Tienen dificultades pensando en 5 grupos de 7 (Tienen a usar:  $7 + 7 + 7 + 7 + 7$ ).

Handwritten notes on the slide include a multiplication table for 5s (1x5 to 5x5) and the example  $7 \times 5 = 5, 10, 15, 20, \dots, 35$ .

Daniela: Gracias profe.

Facilitadora: Nos vemos la próxima semana.

Carmen: Compañeras también fue un gusto.

Varias: Buenas noches.

Facilitadora: Igual, gracias, buenas noches.