

## **Sesión 31**

**Fecha: 29/11/2021**

**Tiempo: 1:10:51 horas**

Carmen: Es que fue que yo fui la que me enredé.

Facilitadora: En serio, qué vacilón.

Carmen: O sea, me entró la duda.

Facilitadora: Sí, vamos, voy a buscarla. Es que no sé qué hice le teléfono. Ah, lo tengo cargando, pero voy abrir aquí el WhatsApp para ver...

Carmen: Yo por ahí tengo la imagen. En realidad, déjeme buscarle y le digo cuál era la operación nada más.

Facilitadora: Ya la encontré, yo creo. 720 dividido entre algo, dividido entre algo que sea igual a 40. Entonces si uno lo ve como una fracción, no sé cómo lo ve usted, pero digamos: una opción es verlo así.

Claudia: ¡Hola! Ya llegué.

Facilitadora: ¡Hola!, ¿cómo le va?

Claudia: Bien, ¿y usted profe?

Facilitadora: ¡Bien por dicha!

Claudia: Cuando llegó así en la tarde, llegó así en carrera a ver si me tomo un cafecito.

Facilitadora: Qué pecado. Y es que Carmen está con una duda desde hace días entonces la estamos revisando. Es esta ecuación:

Claudia: Está bien. Tenemos que aprovechar a la profe ahora.

Facilitadora: Con mucho gusto. De aquí tenemos, esta es, digamos, si uno la escribe como una fracción, es esto, entonces es lo mismo. Usted puede dividir 720 entre ese número y le da 40 o es lo mismo si usted divide 720 entre 40 le va a dar ese número. Yo lo que le decía, creo que eso fue lo que intente decirle, es que si uno tiene dos números: digamos 18 por 40 es igual a 720, en este caso.

$$720 \div x = 40$$

$$\frac{720}{x} = 40$$

$$\frac{720}{40} = x$$

Carmen: Ajá.

Facilitadora: Entonces uno puede, de esta multiplicación, salen dos divisiones: una que es 720 dividido entre 40 es igual a 18 y la otra que es 720 dividido entre 18 es igual 40. Entonces no importa si... Este es uno de los factores de la multiplicación y este es el otro. Entonces si usted divide 720 entre 40 le va a dar este número, si usted divide 720 entre este número le da 40. Hay una relación ahí entre esos tres números. Entonces, cuando lo enseña en el colegio lo que dice es que esta x pasa. Uno podría hacer esto, digamos lo pasa, si usa el algoritmo, o sea la regla dice ahora dice que este x lo pasa para acá a multiplicar, queda 40 por equis, y luego este 40, como está multiplicando, puede pasar a dividir.

Carmen: Para dejar a la equis sola, para despejarla.

$$720 \div x = 40$$

$$18 \times 40 = 720$$

$$720 \div 40 = 18$$

$$720 \div 18 = 40$$

$$\frac{720}{x} = 40$$

$$\frac{720}{40} = x$$

$$\frac{720}{18} = 40$$

Facilitadora: El método más rápido sería cambiar como estos dos del lugar, pero yo creo que lo importante es entender que hay una multiplicación y que de esa multiplicación hay dos posibles divisiones.

Carmen: Ujummm. Pero los míos sí lo resolvieron muy bien, ellos lo resolvieron muy bien, nada más que donde yo dije: guau, no, no funciona como el algoritmo tradicional, cuando uno le dice a ellos, si está multiplicando es división o si está sumando, o sea, cuando se pasa el otro lado del igual va a ser la operación contraria pero aquí no funcionaba por eso.

Facilitadora: Pero sí, bueno sí funciona, porque está dividiendo y pasa a multiplicar.

Carmen: Sí, pero luego se intercambia el otro número para dejar; da como una vuelta más.

Facilitadora: Sí, exacto. Sí, es un poco más difícil, porque la variable está en el denominador.

Carmen: Ese es todo el asunto.

Heidi: ¿Hay que seguir, como seguir despejando que llama uno, verdad?

Facilitadora: Sí, exacto.

Claudia: Hasta encontrar el valor de  $x$ .

Facilitadora: Y aquí, bueno hay que tener cuidado porque la  $x$  tiene que ser diferente de cero, verdad, no tendría sentido, porque sino  $720$  entre  $0$  no tiene sentido.

Carmen: Hay que tener más cuidado con ese, pero bueno, ellos sí lo entendieron bien, ellos entendieron bien que el número faltaba era  $18$ , y no tanto.

Facilitadora: Usted fue la que entró en crisis.

Carmen: Sí, yo fui la que dije: guau, pero por qué es que no me funciona si está dividiendo tiene que pasar a multiplicar, entonces, claro porque yo si pasaba el  $720$ , lo multiplicaba por  $40$  obvio no iba a dar.

Facilitadora: Ah no, porque no los dos están en el numerador. El que puede pasar a multiplicar es este, que es el que está dividiendo, pero como es una variable entonces al final este  $40$ , que está multiplicando después de eso, lo pasa a dividir entonces ya le da.

Carmen: Sí, ahora ya entendí.

Facilitadora: Es el caso más complicado de ecuaciones lineales, de estas digamos.

Carmen: Sí, sí, como le digo fui yo la que de momento dudé y dije pero por qué no se resuelve así. Y si, ahí lo estuvimos viendo y yo tengo una chiquita que es muy buena y me dice: no, niña, pero es que es por tal y tal cosa y ella trata de buscar la explicación. Y digo, no, yo le voy a preguntar a la profe.

Facilitadora: Piénselo, una forma de verlo es, bueno hay dos números que multiplicados dan  $720$ , ¿cuál es el otro número? Verdad, entonces de ahí sale el  $18$ , entonces si usted necesita encontrar, no importa, digamos que este de aquí, si usted necesita encontrar el número que al dividirlo entre  $720$  le da  $40$ , entonces lo que puede hacer es encontrar el número que multiplicado por  $40$  le da  $720$ , o  $720$  dividido entre  $40$ , cuál es el número que le da.

Carmen: Sí, los chiquillos míos lo hicieron, los chiquillos, bueno un estudiante que tengo muy buenillo, creo que lo que hizo fue eso que divide  $720$  entre  $40$  y le dio  $18$ .

Facilitadora: Y la razón es esta: son dos números que multiplicado le dan  $720$ . Entonces  $720$  dividido entre cualquiera de esos números se puede hacer y le da el otro número.

Carmen: Sí, sí, sí.

Facilitadora: Entonces, es cómo establecer la relación entre la multiplicación y la división.

Handwritten work showing the division of 720 by x to find x=40. The work includes the division problem  $720 \div x = 40$ , the multiplication check  $40 \times 40 = 720$ , and the division check  $720 \div 40 = 18$ . There are also some additional calculations like  $720 \div 18 = 40$  and  $40 = x$ .

Carmen: Sí, sí. Ya ahora si me queda claro profe, muchas gracias.

Facilitadora: ¡Con mucho gusto! ¿Quién sabe Edith? Ustedes estaban en la tarde y ella estaba en la mañana, ¿así es?

Carmen: Sí, Edith estaba por la mañana. ¿Será que se le olvidó?

Facilitadora: Quién sabe, yo les avisé temprano y nadie me dijo que no, entonces yo asumí que todo mundo podía. Karla no me dijo nada tampoco. La semana pasada, me dijo que estaba enferma, pero que estaba pensando en conectarse, pero esta semana no me dijo nada. Bueno quería preguntarles, pero quería que estuvieran las cuatro a ver hasta qué semana vamos a trabajar porque yo quiero hacer una evaluación, digamos que matemática- y que ustedes también hagan una evaluación, ya más, digamos que cualitativa del proyecto. Entonces quería hacer eso en la última sesión. Entonces quería preguntarle cuando paramos, pero esperemos a ver si se conectan ellas y sino ahí lo resolvemos por WhatsApp, será.

Carmen: Ay profe, yo con esas dudas que tengo últimamente me quedo seguro en esa evaluación.

Facilitadora: Nombre, demasiado fácil. Nada que ver.

Claudia: Nos quedamos en la evaluación de matemática y en lo cualitativo profe, yo no tengo que preguntar, estamos super contentas, pero sí, yo pienso que no debíamos avanzar mucho, porque profe, de verdad, las dos semanas de diciembre tenemos trabajo y trabajo y trabajo.

Facilitadora: Qué horror. No, yo no sé si ustedes, bueno, no sé, bueno hoy no podríamos hacer la evaluación, tengo que prepararla.

Claudia: ¡Ajá!

Facilitadora: Pero, pero si ustedes quieren la hacemos la otra semana y cerramos la otra semana. Por eso les preguntaba, yo sé que les falta un montón en la escuela y con ese enredo.

Claudia: Sí, pienso yo. No sé Adri.

Carmen: Profe, pero en sí, ¿cuántos temas nos quedan por ver?

Facilitadora: Este, este es como, yo diría que este es como el último ya después lo que hace. El libro lo que tiene es un capítulo que es como volvernos al principio sobre las propiedades de las

operaciones, que yo pensaba que valía la pena hacerlo porque eso lo habíamos hecho muy, muy al principio, entonces como volver a relacionar todo lo que hemos estado haciendo ya con la parte más matemática, digamos así, con la conmutabilidad, la asociatividad, como ya más matemático otra vez, y prácticamente eso sería ya. Pero en realidad ya lo habíamos hecho al principio.

Carmen: Tomando en cuenta las sesiones que podrían faltar, cuantas estimaría usted digamos: no necesariamente para que se cierre así, que sea un cierre abrupto que usted diga ay no, pero qué torta no, no se pudo ver tal cosa.

Facilitadora: Está, yo pienso que esto nos cierra el ciclo, yo lo veo así. Primero, hicimos toda la matemática para nosotras, digámoslo así, que fue como revisar estrategias y estrategias como para ir abriendo posibilidades a ver cosas diferentes. La segunda parte trabajamos más pensando en función del estudiante verdad, de cómo el estudiante piensa, ponerle más atención a la forma en que la estudiante piensa. Y esta presentación de hoy que en realidad yo creo, que bueno podría ser que duremos dos horas digamos, hoy y la otra semana por decir algo. Depende y la podemos hacer más rápido también si ustedes quieren terminar la otra semana, no sería problema. Esta lo que hace es centrarse más en cuál cuáles son los tipos de preguntas que podríamos ..., cómo podríamos generar en interacción entre nosotras y el estudiantado, pero también entre el estudiantado: estudiantes con estudiantes, para generar más conversación de parte de ellos. Son como algunas estrategias para generar conversación, discusión sobre los problemas.

Carmen: Eso es muy necesario, porque de verdad a veces se le acaba a uno cómo seguir explorando el asunto con los problemas y eso.

Facilitadora: Son cosas muy puntuales, sobre, por ejemplo: si alguien presenta una estrategia en la pizarra qué pregunta le podemos hacer a esa persona o al resto del grupo para que haya interacción. Son cosas como muy simples, tal vez, pero que es cuestión de que las prueban a ver cómo les va, y yo pienso que ahí podríamos dejarlo. Como les digo si hubiera más posibilidad nos devolvemos a esa matemática, como cerrar esa parte, pero en realidad eso ya lo habíamos hecho, ya lo habíamos hecho al principio, nada más que este libro lo tiene el final. Lo que pasa es que yo empecé con la parte de matemática, que eso no está en el libro, digámoslo así. Yo estoy demasiado contenta, en el sentido de todo el tiempo que hemos trabajado. Ya cuando terminemos lo que voy a hacer es hacer el trámite. Yo nunca lo he hecho, pero voy a hacer el trámite en Acción Social para que les den un certificado con las horas. Llevamos, no sé si ustedes llevan la cuenta, pero yo creo que ya son como hoy son 49 o 50 horas, entonces yo creo que ya con eso de algo les sirve, verdad, en el MEP. Entonces, voy a pedir los certificados. Lo que estoy pensando, es que hubo gente que participó muchas veces, entonces lo que pienso hacer la cuenta de todas las horas y luego hacer la cuenta de cada persona, digamos, en el caso de ustedes sería por el total de horas, pero si hubo gente que participó solo las primeras siete semanas les puede hacer el certificado por las 28 horas, por ejemplo. Yo pregunté y me dijo la muchacha que sí, que lo que

se hace es un certificado que dice cuántas horas del total participaron. En el caso de ustedes serían todas. Por lo menos para que les quede algo de ganancia en cuanto al puntaje del MEP y eso, si a usted les interesa, no sé si les sirve en realidad. No sé ...

Carmen: No esperaba eso.

Claudia: Claro que sí profe. No esperaba eso.

Facilitadora: A mí me hizo mucha gracia porque al principio nadie, nadie me preguntó, nadie, y yo no la verdad no tenía respuesta tampoco, no sabía si se podía o no se podía, pero ya después hice la averiguación como el curso se fue extendiendo y extendiendo, yo dije, no, ya vale la pena, ya vale la pena que reciban un certificado porque son muchas horas. Han hecho una gran inversión de tiempo y esfuerzo usted, de sacrificio, entonces yo ya entonces le pregunté y la muchacha lo que me dijo, la encargada lo que me dijo es. Cuando ya terminé me dice cuántas horas son, me manda la lista y hacemos el trámite. No sé cuánto dura el trámite porque como les digo es la primera vez que lo voy a hacer, pero yo espero que no dure demasiado para que ya puedan llegar el certificado al Ministerio.

Entonces bueno, si quieren trabajamos. Voy a ver hoy cómo nos va y tal vez, bueno ya son las 7 y 15 casi, yo no creo que ya se conecten Edith y Karla.

Claudia: Profe, yo tengo una pregunta, ¿cómo hago para devolverle el material que me prestó?

Facilitadora: Ah, yo voy a la escuela cuando usted me diga y lo recojo. Eso no es problema.

Claudia: Ah bueno, porque ya lo que seguimos ahora, bueno ya la otra semana son estrategias, dos semanas y ya después repaso, repaso.

Facilitadora: Usted me dice ya la otra semana que día y a qué hora le queda bien y nos ponemos de acuerdo.

Claudia: Ahora yo le mando entonces el mensajito profe, porque ya tengo la articulación con los chiquitos del kínder, porque me van a dar primero, otra vez.

Facilitadora: Ay de verdad, qué bien, qué reto.

Claudia: Sí, yo le aviso profe.

Carmen: Y coordinamos conmigo.

Facilitadora: ¿Por qué?

Carmen: Porque yo tengo los tangramas.

Facilitadora: Ah bueno, bueno, yo pensé que también iba a dar primero

Carmen: Ah no, no, no, yo voy a dar tercero.

Claudia: Le voy a heredar mi grupo, niña.

Facilitadora: Esos estudiantes qué dichosos.

Claudia: Va a ver.

Facilitadora: Demasiada suerte tienen esas familias con esas maestras, que bárbaras. ¡Qué bueno! Sí, no se preocupe. Si yo no tengo reunión o no estoy dando clase, yo voy a la escuela en cualquier momento, yo estoy super cerca. Y ahora como ya no hay restricción, entonces ya es muy fácil moverse.

Claudia: Está bien profe, entonces en eso quedamos. Yo le envío el mensajito.

Facilitadora: Sí, gracias. Bueno, vamos trabajando con esta a ver cómo nos va. Esta, como les digo, la idea es generar más discusión matemática en el aula. La idea es que cuando hacemos una comunicación entre diferentes personas en el grupo, eso es importante para la persona que explica, digamos, yo resuelvo el problema yo lo explico, eso es importante para mí, porque yo tengo que buscar las palabras, transmitir el mensaje, hay todo un proceso mental, no es lo mismo sentarse y escribirlo, o encontrar la solución que tener que verbalizarlo pensando que otras personas lo entiendan. Pero también a la hora de verbalizarlo si vamos generando una cultura de escucha y de que vamos a hacer preguntas y vamos a comentar la respuesta, que no sea solo que se paró y expuso, sino que haya más conversación, entonces el proceso se convierte en muy importante también para todas esas personas que están escuchando. Entonces, hay que poner atención, entender lo que la persona dijo y después poder definir, si por ejemplo, si lo que esa persona hizo, se parece a lo que yo hice o si lo que la persona hizo está correcto o está incorrecto. Entonces, aquí lo fundamental es generar discusión y generar comunicación entre las personas, no es sólo que se paren cinco y expongan, sino qué tipo de estrategias puedo usar para que realmente pongan atención y se comuniquen.

Entonces, vamos a ver tres ideas generales, una que es: yo resuelvo el ejercicio, otras personas resuelven el ejercicio, entonces, comparamos ideas entre lo que hizo una persona y lo que hizo otra. La segunda idea grande es: atender a los detalles de lo que hizo la otra persona, o sea, yo escucho lo que la persona dijo y luego me fijo en el proceso, en cuál operación hizo, o en el dibujo, en cualquier detalle que tenga que ver con esa solución. Y la tercera posibilidad es: construir a partir de lo que la otra persona hizo, ya sea la solución completa o una parte de la solución de la persona, y a partir de eso yo pienso, por ejemplo, le podemos decir a alguien que explique solo el principio de lo que está pensando y a partir de ahí otra persona aporta algo más, entonces la intención es que haya siempre una concentración porque me pueden preguntar o porque yo quiero participar.

Entonces de esas tres ideas vamos a empezar con comparar una idea con la de otras personas. Por ejemplo, aquí, una opción es determinar si las estrategias que usaron dos personas son iguales o no. Entonces, expone María, expone Rebeca y luego definimos si las dos hicieron lo mismo o hicieron cosas diferentes, entonces, tengo que escuchar las dos personas y tengo que después no sólo escucharlas, si no evaluar.

¡Perdón! Se me va a apagar la compu.

Después, otra opción puede ser definir si está de acuerdo o no con lo que la otra persona dijo, yo puedo decir: no, es que me parece que hizo mal tal cosa o me parece que se equivocó con tal otra. Y otra posibilidad es: la persona presenta el ejercicio y después la maestra nada más pregunta: levante la mano o levanten el dedito lo que sea si usted cree que lo que usted hizo es parecido a lo que hizo la otra persona, o levanten la mano los que hicieron algo diferente a lo que expuso la persona. Esto obliga a cada estudiante a pensar en lo que hizo, tratar de entender lo que la otra persona hizo y después definir si se parecen o no se parecen, si estoy de acuerdo, si ahí se encuentra un error, si dos estrategias son iguales o son diferentes entre dos personas que expusieron, que sé yo. Entonces, se va generando ese ambiente de que tengo que entender lo que las otras personas hicieron.

Luego la segunda idea grande aquí, es atender a los detalles de la idea de otra persona, ¿qué podemos hacer aquí? Con la guía de cada una de las docentes yo le puedo decir, bueno Carmen, por ejemplo, resuelva el ejercicio y lo explica. Entonces yo le digo a Claudia: bueno, Claudia explícame con sus propias palabras qué entendió usted de lo que hizo Carmen. Puede ser que lo haya entendido todo o que solo haya entendido una parte o que definitivamente no entendiera. Entonces el decirle que lo explique me permite evaluar si ese estudiante comprendió no comprendió y ver hasta donde comprendió, también. Podría ser que quien entendió el proceso, pero no lo puede explicar muy bien o que entendió el proceso, pero la respuesta no la encontró, qué sé yo. Luego podría hacer también que explique, que una persona haga un dibujo en la pizarra o tomamos una foto y la proyectamos, o en la forma que sea, o veo el cuaderno de un compañero y veo a ver cómo resolvió el ejercicio, entonces, así como hemos estado haciendo nosotros, casi que todos los días, que vemos una solución y pensamos cómo fue que lo hizo, bueno, entonces hacer lo mismo. Bueno, aquí está el dibujo de lo que hizo alguien, ¿qué entiende usted?, considerando el contexto del problema ¿cómo lo puede explicar? Otra vez, aquí podría ser explicar de qué forma dos estrategias son iguales o diferentes y también se podría preguntar algún detalle sobre la estrategia que fue compartida, y ahorita vamos a ver ejemplos. La tercera idea grande es construir a partir de la idea de otra persona entonces después de que la persona explica lo que está pensando, se les puede preguntar que añada algún detalle. Si la estrategia no es correcta y hay errores de cálculo, o lo que sea, o el razonamiento no está correcto, entonces, bueno, qué puede aportar usted, adónde está el error, de qué forma la estrategia se hace más eficiente. Tal vez alguien contó de uno en uno y era más fácil contar de diez en diez o de veinte en veinte. Entonces, el que yo le dé una sugerencia a otra persona puede ayudarme a mí a entender mejor y a la otra persona a mejorar lo que está haciendo. También podría ser que proponga algo diferente, bueno, Carmen la hizo de cierta forma y Claudia dice: a mí me parece que es mejor hacerlo más fácil de esta otra forma.

Definir también como la estrategia alternativa es diferente de la primera, se presenta una y cómo la segunda es diferente, entonces vamos comparando. Justificar por qué una estrategia funciona en un problema y no en otro; tal vez en un problema me sirve contar de cinco en cinco, pero resulta que, en el segundo problema ya no, entonces, bueno, por qué aquí sí, por qué allá no.



Y luego otra opción es que entre dos personas o más construyan la solución a un problema. Entonces vamos, vamos ahora generando discurso, discusión en el aula.

Vamos a ver algunos ejemplos de diálogos y vamos a ir analizando cuáles fueron las preguntas que las maestras fueron introduciendo. Entonces aquí está el primer problema dice: Ayer él fue al supermercado y compró 8 cajas de confites, hay 23 confites en cada caja, ¿cuántos confites hay en total? Entonces son 8 cajas de confites y en cada caja hay 23.

Entonces, bueno primero cada estudiante resuelve el problema de manera individual. Si no entienden algo pueden preguntarle a los demás, ustedes definen la dinámica de cómo eso se hace, y después cuatro estudiantes fueron a la pizarra y representaron sus respuestas.

Yo hoy, antes estaba viendo..., yo tengo unas sobrinas que están, debe ser como en materno, y estaba viendo unas fotos de la escuela que publicaron ahí en Facebook y estaba viéndolos sentados en..., como que pegaron las mesitas como se trabajaba antes, como en grupos, todos con la mascarilla puesta pero sentaditos uno al frente el otro, en grupos de cuatro y me pareció tan lindo, son muy chiquitines, verdad, pero me pareció tan bonito verlos otra vez en grupos, porque ha sido como tan difícil esto del trabajo colaborativo. Ahí estaba cada uno en su mesita trabajando, eran cosas manuales lo que estaban haciendo, pero digo yo, bueno, ahí poco a poco tal vez podamos ir retomando verdad esa posibilidad de que haya más trabajo entre las diferentes personas del grupo, porque en este momento está es un poco complicado.

Bueno, entonces recuerdo: son 8 cajas y son 23 confites. Entonces vamos a ver una solución. Entonces esta es la solución que dio María. Voy a ponerlo por aquí: 8 cajas con 23 confites. Esa es una solución, voy a darles un momento para que la piensen, que la vean.

Y entonces María presenta eso, que fue lo que hizo y entonces ya aquí tenemos un diálogo de esta, María presenta la solución. El libro tiene vídeos, nada más que en los vídeos está en inglés, pero estaba viendo que como nos hace falta a veces el material porque esto es una pizarra y este material, seguro la pizarra es magnética, entonces esas barritas se pegan en la pizarra, quedan ahí. Me hizo mucha gracia porque no es un papel sino que están puestos en la pizarra y ahí la chiquita explicaba.

Bueno, entonces aquí empieza Celia diciendo: “Ya entendí” entonces la docente le pregunta: ¿notó algo? Recuerden que es María, la que hizo esto fue María, entonces: “Sí ya sé qué hizo”, entonces Celia va a la pizarra y señala los bloques. Primero puso 10, 20 y entonces 20, 21, 22, 23, entonces esto es 23. Entonces la docente le pregunta: “¿de dónde salió 23?” Celia le contesta, “usted tiene 23 de ellos entonces que son 23”, entonces la docente le pregunta: ¿23 qué?, porque está hablando del número, pero ya perdió el contexto del problema, entonces Celia le dice que confites, y recuerden que esta solución la dio María, entonces la docente va adonde María y vuelve a ver a María y le pregunta que si eso fue lo que ella hizo. Entonces la docente repite: 10, 20, 21, 22, 23 entonces los estudiantes dicen: “Es lo mismo”, lo que hizo Celia y lo que hizo María es lo mismo, entonces la docente les pregunta: “¿lo mismo?” Entonces esto es una caja, esto es otra caja, ¿es esta la segunda caja y cuantas piezas hay ahí? Entonces aquí, está es la segunda caja entonces otra vez 10, 20, 21, 22, 23. ¿Cuántas cajas hay? Pues entonces se cuentan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, entonces otra vez, otra vez volvemos al contexto, ocho cajas.

¿Cuántos conflictos hay en cada caja? Veintitrés; y ya después Didier dice: Niña yo hice el mío diferente, conté primero las decenas y luego las unidades.

Muy bien, escuchemos lo que dijo Didier, entonces dice: “Yo conté 10, 20, 30”, va a la pizarra también entonces va contando “diez, veinte, treinta, voy apuntarlo aquí, 10, 20, 30, 40, 50”, lo que hizo fue contar las barras de diez primero y se da cuenta que son 160 y luego se fue contando uno por uno todos estos, entonces llevaba 160 y 61, 62, 63, 64, 65, 66 y ahí siguió contando uno por uno. María, ¿así fue cómo usted lo hizo? y María le dice que sí, entonces María va a la pizarra y escribe esto:  $10 + 10 + 10$ ,  $10 + 10 + 10$  debajo de cada uno de los, de las representaciones que tienen ahí, entonces ya la docente luego le pregunta Katia, a otra estudiante ya, ¿qué hizo María? Entonces Katia explica que escribió  $10 + 10 + 3$  y la pregunta, la docente pregunta por qué hizo eso, por qué lo descompuso de esa forma, por qué se descompuso en  $10 + 10 + 3$ . Entonces Katia dice: es igual a 23. Luego otra estudiante que se llama Pamela dice que lo puede ser más fácil. Bueno, ¿de qué forma se puede ser más fácil?, entonces Pamela dice que con los veintes. Bueno muy bien, veintes. Entonces Pamela dice puede ser  $20 + 20 + 20$ . Otra vez viendo el dibujo, como hay dos barras en cada uno, se puede ir sumando de 20 en 20. ¿Eso es igual o diferente de lo que hizo María? Entonces en lugar de contar de 10 en 10 puedo contar de 20 en 20 dice Samuel y Pamela dice que 20 es 10 y 10, y ahí se termina el diálogo.

Yo aquí lo aquí lo escribí, no sé si lo ven, porque queda con letra muy chiquitita. Ahí lo escribí, ahí está completo todo el diálogo. Entonces lo que quería es que lo revisemos y que me digan qué les parece, qué les parece las preguntas que hizo la docente o la intervención de los estudiantes, qué les llama la atención del diálogo. Si no lo ven bien entonces me devuelvo y lo vamos viendo por partes.



Claudia: Sí se ve bien profe.

Facilitadora: ¿Sí? Ah bueno.

Carmen: Sí, para mí también se ve bien y digamos explora mucho lo que hemos venido viendo en otros momentos, de cómo varía la estrategia, de repente unos contaron de 10 en 10 y otros reunieron dos decenas dijeron 20, por ejemplo, para resolver el problema. Entonces se ve ahí los diferentes estilos que utilizan los estudiantes, estrategias similares y con diferencias para resolver la situación.

Facilitadora: Gracias.

Claudia: Profe este resumen, ahora que somos más conscientes de lo que estamos enseñando en matemática, ya cuando uno está en la clase matemática como que les presta más atención a las

reacciones de los compañeritos, digamos de los niños cuando ellos resuelven o van a la pizarra. Vieras que un día de estos, bueno que estábamos está introduciendo la multiplicación, entonces había un problemita que decía: bueno, para introducir digamos, “En una granja hay, digamos cuatro caballos y cada caballo tiene cuatro patas. Había cinco pollitos y cada pollito tiene dos patitas y así”. Eran tres animales y al final la pregunta era: ¿cuántas patas hay en total entre todos los animales? Y entonces, digo yo: cada quien que lo vaya a resolver como pueda y después me explica alguno y entonces pasa un chiquito a la pizarra y hace un cuadro, una cuadrícula y hasta yo me sorprendí y le dije: ¿Nombre del estudiante qué vas a hacer? \_ ¡Niña espérese, espérese!, dice. \_ (Nombre del estudiante), pero es nada más decirme el total o sumar, ¿cómo sumó? Y yo lo veía que él hacía cuadros y rayas. Dije yo: ¡Dios mío! ¿qué estará haciendo? Y en eso como que reaccioné y dije: ¡bueno está bien, demos tiempo! porque los otros chiquitos decían: ¡No así no es, Nombre del estudiante, así no es! Y él siguió, él siguió firme y comenzó e hizo la cuadrícula y entonces dijo cuatro caballos entonces son cuatro y marcaba los cuadritos, un caballo cuatro patitas, otro caballo, entonces iba marcando los cuadritos así y después sumó todo. Eso fue una forma de explicarla y al final digamos así mental. Y dije yo: vea qué realidad y los chiquillos después: ¡tenía razón Nombre del estudiante, dicen.

Facilitadora: ¡Qué bonito! ¿Verdad?

Claudia: En otro tiempo tal vez no le llamaba la atención o no le prestaba tanta atención a este procedimiento y todos aprendimos que había que dar tiempo a que él lo resolviera para ver qué era lo que había hecho y él como un profesor explicando todo lo que hizo.

Facilitadora: ¡Qué bien! ¡Qué bonito!

Carmen: ¡Qué lindo! ¿Verdad?

Facilitadora: Entonces ahí se ve donde usted ha ido generando estos espacios.

Carmen: Porque vea que él sabía que, le decía: ¡niña espérese! porque él tenía claro lo que él iba a hacer.

Claudia: Sí, es que eso fue lo que me llamó la atención, aunque yo le cuestioné, digamos, porque yo de momento dije: ¡Uy Dios mío qué va a hacer! ¿Verdad? Y él me decía: ¡niña espérese!, y me hacía la manilla, así como de un lado, espérese niña. Como que no me enrede, más bien, yo sé lo que estoy haciendo. Y yo lo disfruté tanto, porque dije yo: Dios mío, de verdad qué bonito que es ese tiempo, o sea, sacar ese tiempo, aunque tardamos mucho porque él es lerdito para escribir y así, pero los chicos lo disfrutaron un montón. Después todos gozaban porque decían: mire niña, Nombre del estudiante nos llevó por todo lado y al final lo resolvió bien.

Facilitadora: ¿Y tuvo otras respuestas diferentes?

Claudia: Sí, unos los hicieron con suma así algoritmo normal de la suma y otros lo hicieron diferente como en unos círculos, entonces fueron colocando ahí, cuatro caballitos, digamos, eran las bolitas y ahí ponían digamos 4 y 4 porque la idea era que lo representarían con dibujos

primero. Y otro no, “yo lo hice por cálculo mental” me decía. Entonces era lo que yo le decía algunos sí van más avanzadas.

Facilitadora: Sí, entonces ahora piense, cuando le pase esa situación, la intención de esto de hoy es eso, bueno, qué tipo de preguntas usted puede plantear para que ellos comparen, lo que hizo *Nombre del estudiante* con lo que hizo otra persona, ¿qué tienen parecido? Aunque parezcan dibujos diferentes, en qué se parecen, entonces tal vez, qué sé yo, a pesar de que uno hizo círculos y otro hizo cuadritos, siempre están representando las cuatro patas, por ejemplo, o el número de caballos o el número de gallinas, que sé yo. Entonces, bueno ir generando esas discusiones, cómo, cómo la que usted hizo es diferente de la que hizo *Nombre del estudiante* o de qué forma se parecen. O bueno, que él explica una parte y después que alguien termine de explicarlo a ver si lo han entendido. Entonces es eso, cómo hago para reformular un poco las preguntas que hago, de manera de que ellos empiecen a comparar y a pensar un poco más en las soluciones. Por las limitaciones de tiempo que eso implica a veces en el aula no tener mucho tiempo.

Aquí hay un resumen de ese diálogo, entonces qué hizo la docente. Primero verificó que todas las personas comprendieran el problema; eso muy importante para que puedan resolverlo, luego llamó a Celia para que, porque la docente se había dado cuenta que ya Celia había comprendido el trabajo de María. Por eso la escogió. En el caso suyo Claudia, usted, usted, ¿él se ofreció o usted no lo escogió?, ¿usted no revisó lo que él había hecho previamente entonces?

Claudia: No. Yo pregunté. Bueno, es como retos, yo estoy trabajando mucho con ellos así. A ellos les gusta mucho, así como dramatizar y jugar y el reto, entonces yo dije bueno vamos a resolver esto, vamos a ver quién lo resuelve primero, pero cada quien verá cómo lo resuelven. A mí no me pregunten porque yo ya se me olvidó todo lo de matemática les dije. Entonces ellos comenzaron y unos no, decían: no entiendo y según ellos iban y le decían cómo hacerlo, entonces yo dije: “bueno ahora alguien que venga a la pizarra, que lo explique” y el de una vez se ofreció y yo dije, por eso fue que a mí me sorprendió porque cuando yo vi que él hizo un cuadro yo dije, ay Dios qué va a ser verdad, dije yo: “*Nombre del estudiante* qué vas a hacer”, “Niña espérese” me dice, porque dije yo, no sé, no sé o sea jamás me imaginé que lo resolviera así como en la cuadrícula pero me hizo gracia y sí lo hizo de lo más bien.

38:05

Facilitadora: Y otra pregunta, ¿ustedes no tienen proyectores en la escuela ni computadora?

Claudia: Tenemos la pantalla.

Facilitadora: Sí tienen. Porque yo lo que he estado pensando, y que no lo hacía antes en el aula, es que uno podría tomarle foto, porque yo siempre decía: cómo hago yo para proyectar lo que el estudiante hizo. Pero con todo esto la virtualidad yo digo: por qué no se me ha ocurrido, ahora es tomar una foto del cuaderno y se la pasa usted misma por WhatsApp o por correo. Y si tiene pantalla entonces la proyecta digamos, no tiene que ir otra vez a la pizarra escribirlo todo sino

nada más va, usted proyecta y que él expliqué. No sé si eso le servirá para ganarse un poco de tiempo.

Claudia: Sí, a mí me parece una buena idea.

39:10

Facilitadora: Yo un día de estos; yo siempre decía, yo me podría mandar a WhatsApp algo a mí misma verdad y me dice mi hijo, mami abra un grupo de WhatsApp, meta a alguien y lo saca de una vez, entonces de verdad lo hice, lo hice digamos con él y conmigo, nada más un grupo y después lo saqué inmediatamente a él, entonces me quedé con un grupo de solo yo. El grupo es sólo mío, entonces ahora puedo mandar fotos al grupo o digamos si hay alguna información que yo quiero que no se pierda entonces la mando a ese grupo que soy solo yo, entonces yo pienso...

Carmen: Esa es una super idea profe.

Facilitadora: Verdad, a mí no se me había ocurrido porque yo siempre estaba con inquietud de cómo me mandaba cosas a WhatsApp a mí misma, pero no había podido encontrar cómo, pero mi hijo me dio la solución y, claro, entonces digamos si ustedes están en el aula, toma la foto en el momento y si tienen hay la posibilidad de la pantalla la proyecta y que la explique, creo que eso ahorraría tiempo y para qué el estudiante va a ser dos veces lo mismo si ya lo tiene hecho en el cuaderno, en una hoja, donde sea.

Claudia: Sí profe, sería una buena idea, pero vieras como disfrutan y ellos usar la pizarra.

Facilitadora: Bueno, sí.

Claudia: Como, como, vea usted no se imagina porque pasamos dos recreos y ellos la felicidad es que yo los dejé jugar con marcadores. Escuche niña Carmen, así que prepárese, porque son felices usando la pizarra, entonces yo los dejo, uno a uno, a veces les digo bueno, esperen a ver cómo estoy de tinta, si tengo bastante tinta los dejo, porque son todos allí, se hacen un puño, aunque sea una esquinita y ahí ellos juegan como son 10 o 12 entonces ellos disfrutan un montón. Ya tal vez más grande sí pero digamos así de chiquititos ellos son felices, ellos se transforman de verdad en profesores y entonces a mí me hace mucha gracia verlos explicando.

Facilitadora: Bueno está bien; es parte del proceso, está bien me parece excelente.

Carmen: Niña que yo lo que hacía con eso del WhatsApp es que me lo mandaba yo, digamos le digo mi esposo ahí van esas fotos, pero es porque yo la ocupo, entonces ya yo las puedo bajar. Yo se las mando como decir a mi esposo y digo: le mandé a eso, pero es que es mío, pero ya me voy a hacer ese grupo.

Facilitadora: Pues sí, yo por ejemplo un día necesitaba guardar una ubicación que no se perdiera y se la mandé a mi hijo y le dije eso, es para mí. Pero esta, la semana pasada fue que me dijo: “pero mami hágase un grupo para usted” y yo: ¿cómo hago eso? y entonces ya me dijo yo qué barbaridad cómo no se me había ocurrido. Y claro, porque si no después uno anda ahí buscando

las fotos por todo lado, la información o lo que sea verdad y ya así se solucionó el problema al menos para mí.

Claudia: Buena idea de verdad profe. Yo también tengo que hacer unos experimentos con mi esposo, con mi hijo y a veces no están, entonces yo les digo: ahí va algo y luego, después me lo envían otra vez.

Facilitadora: Esa es la solución porque yo a veces lo que hacía, por ejemplo, lo que estaba haciendo en los cursos era que ellos me mandaban la foto por WhatsApp y yo la descargaba o bueno, lo que hemos estado haciendo aquí, la descargaba o ellos me mandaban la foto por correo y yo la descargaba, pero claro es más fácil así por solo WhatsApp. O yo les mandaba la foto por correo, que sé yo, entonces era un enredo.

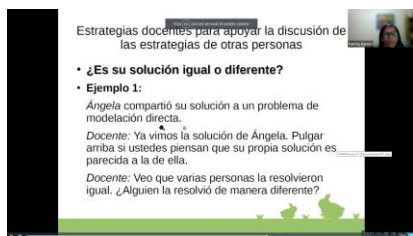
La otra cosa que le va a decir Claudia que le puede ayudar, pienso, es cuando ellos están resolviendo, si no lo están haciendo directamente en la pizarra, bueno, o aunque lo estén haciendo directamente en la pizarra, o si lo están haciendo en papel es observar rápidamente las soluciones que están escribiendo. Entonces, el ver las soluciones diferentes que tenga puede ser que a usted le ayude a pensar, bueno, esta es la más sencilla o esta la más difícil o está es la más sorpresiva, verdad, entonces a partir de esa información que ustedes ven rápidamente en el aula entonces usted decide quién va primero. Si va a mandar a dos o tres personas, entonces bueno, quiénes van a ser y en qué orden van a explicar. Podría ser que los tres vayan a la pizarra de una vez, pero, bueno, quién va a explicar primero. O también usted lo hace a la libre a como lo hizo, que sea voluntario. Pero a veces también es bueno escoger, tal vez escoger primero una que no está correcta y analizarla o dejarla de último, qué sé yo, usted va decidiendo a partir de lo que observa y eso le va ayudando también a construir esa interacción entre ellos.

Aquí hay otras cosas, por ejemplo, la docente le pidió a Celia que fuera a la pizarra y bueno, ya que Claudia dice que lo disfrutaban tanto, entonces con más razón hay que aprovecharlo, porque entonces esto ayuda al resto de personas a entender y reflexionar. Luego también la docente fue incluyendo a otras personas en la discusión, entonces, por ejemplo, le pidió Didier y a Katia que participaran, luego pidió detalles. No es así en general, “bueno es que cada circulito eran las patas de la gallina”, que sé yo, o cada palito eran las patas de la gallina, sino detalles, cosas específicas, por ejemplo, ella pregunta: Bueno, ¿de dónde salió ese 23? o entonces ya ella le dice que son 23, que eran 23 lo que decía el problema, ¿pero 23 qué? Entonces vuelve aquí al preguntar “23 qué”, vuelve al contexto del problema, no pierden de vista que era lo que decía el problema.

Luego otra cosa que está representada en ese ejemplo es que María ya tenía una solución escrita, o representada en la pizarra, pero después ella se levanta y va y agrega  $10 + 10 + 3$  y eso lo escribe después, para explicar mejor qué era lo que tenía en el dibujo. Luego la docente también apoyó a Pamela para que agregara nuevas ideas al trabajo, porque fue sumando de 20 en 20, en lugar de sumar, como hizo María de 10 en 10. Y luego también pregunta le preguntó a María que si lo que proponía era igual o diferente a su estrategia. Entonces vean que hay un

montón de preguntas ahí muy simples, que fue ayudando a generar discusión y a generar la posibilidad de que vayan comparando soluciones. Y vean que hubo gente que empezó a contar tal vez de uno por uno, de diez en diez, pero después suben a otro nivel cuando empiezan a sumar de veinte en veinte, y algunos estudiantes probablemente se den cuenta que entonces es más eficiente. Entonces es eso, cómo hago una discusión que permita ver detalles diferentes y cómo también conecto esas soluciones, que no sea bueno, esta es diferente de que está porque uno sumaba de 10 en 10 y otro de 20 en 20. Eso es una diferencia, pero después también se conectan porque  $20 = 10 + 10$  entonces empezar a ver esas conexiones también.

Aquí hay otro ejemplo y esta es, bueno su solución es igual o diferente. Entonces es bueno, Ángela compartió la solución a un problema que fue hecho con modelación directa. Recuerden que modelación directa es cuando hacemos un dibujo o usamos material concreto, como este que acabamos de hacer, que eran 23 confites y los representan con los 23, ocho veces. Entonces: “Ya vimos la solución de Ángela, pulgar arriba si ustedes piensan que su propia solución es parecida a la de ella”, entonces simplemente es: Ángela explica y luego preguntamos quiénes están de acuerdo en que su solución es parecida. Entonces luego dice: “Veo que varias personas lo resolvieron igual, bueno quién la resolvió entonces diferente y entonces ahí ya se puede generar otra discusión ahora nuevamente. ¿Por qué es diferente a la que hizo Ángela? Y después ver si es cierto que es diferente de alguna forma y ver también cómo se conectan esas dos soluciones.



Aquí hay otro, ejemplo, también de esta solución igual o diferente. Entonces aquí dos estudiantes Gabriel y Allen compartieron las soluciones antes de pedir al resto del grupo y indicar cuál estrategia habían utilizado. Entonces ellos dos primero explican su solución. Entonces la docente dice miren aquí, señalando las soluciones que están en la pizarra, vi que algunas personas la resolvieron de manera similar a Gabriel y que otras personas de manera similar a Allen. Entonces si usted la resolvió como Gabriel o si la resolvió como Allen señale la estrategia, verdad, como están las dos soluciones en la pizarra entonces cada quien va a decir a cuál de las dos se parece y luego entonces ella se fija a quien, por ejemplo, señaló que se parecía a la de Allen y entonces la pregunta es: ¿por qué cree que esa solución es parecida a la de Allen? Igual la pregunta podría ser: ¿por qué cree usted que su estrategia es diferente a la de Allen? Entonces es obligar a todo el mundo a pensar si es igual o es diferente. No sólo a una persona, sino que a todo el grupo de alguna manera los obliga a compararlas.

Estrategias docentes para apoyar la discusión de las estrategias de otras personas

- ¿Es su solución igual o diferente?
- Ejemplo 2:
  - La docente pidió a dos estudiantes, Gabriel y Allen, compartir sus soluciones antes de pedir al resto del grupo indicar cuál estrategia habían utilizado.
  - Docente: Miren aquí (señalando las soluciones que están en la pizarra). Vi que algunas personas la resolvieron de manera similar a Gabriel y otras personas de manera parecida a Allen. Si usted resolvió el problema como Gabriel o como Allen, por favor señalen la estrategia que corresponda.
  - Docente: Teodoro, veo que señaló la estrategia de Allen. ¿Puede decirnos una razón por la cual su estrategia es parecida a la de Allen?

Aquí hay otra, otra opción que es explicar la estrategia de otra persona, entonces dice el problema Matías tiene doce cajas de cereal, él le dio cinco cajas a sus primos. ¿Cuántas cajas de cereal le quedan a Matías? Entonces dos personas explican la estrategia, Jorge y Stella, y los dos lo hicieron usando modelación directa. Entonces aquí está el ejemplo entonces dice: la docente pregunta ¿Stella puede explicarle la estrategia que hizo Jorge? Entonces Jorge lo que representó fue este dibujo, con este dibujo representó el problema. Entonces Estelia dice: “Yo hice exactamente lo mismo”. Jorge dibujó 12 cajas y quitó 5. Muy bien puede mostrarme las cajas que quitó. Entonces Stella va a la pizarra y dice, bueno, aquí hay 12 cajas y hay una equis en 5 de ellas, que son las que quitó y luego cuento las que me quedan y son 7. Entonces vean que aquí ya no se trata solo de saber si son iguales o diferentes, sino explicar con detalle por qué mi solución es igual a la de otra persona, en este caso.

Estrategias docentes para apoyar la discusión de las estrategias de otras personas

- Explicando la estrategia de otra persona
- Ejemplo 1: Preguntando detalles
 

Matías tiene 12 cajas de cereal. Él le dio 5 cajas a sus primos. ¿Cuántas cajas de cereal le quedan a Matías?

Jorge y Estelia explicaron sus estrategias, ambos utilizaron la modelación directa.

Aquí hay otro ejemplo, dice Josué leyó 17 libros, su hermana leyó 9 libros, ¿cuántos libros más leyó Josué que su hermana? Vean la solución y me dicen qué, cómo la entienden. (momento de silencio, 50: 24)

¿Lo entendieron, sí?, ¿o está muy enredado?

Estrategias docentes para apoyar la discusión de las estrategias de otras personas

- Explicando la estrategia de otra persona
- Ejemplo 2: Dígame una cosa
 

Josué leyó 17 libros. Su hermana leyó 9 libros. ¿Cuántos libros más leyó Josué que su hermana?

Handwritten solution on a piece of paper:

```

      17 9
      10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17
      1 2 3 4 5 6 7 8
      
```



Claudia: Bueno no sé. En este caso yo veo que anotaron allí, digamos comenzó a contar lo de la hermana y vea que empezó: 10, 11, 12, 13 hasta llegar a 17 y abajo anotó, digamos, 10 sería uno, 11 dos y así uno lo hace con los dedos, así mental, para que ellos lo resuelvan, pero ahí lo hizo en forma escrita. Así lo entiendo yo.

Facilitadora: Sí, así, exacto. Aquí hizo el dibujito de cada uno. Josué tiene 17, la hermana tiene 9, pero empezó de 9, verdad y hasta llegar a un número mayor, que era el de Josué y luego, exacto, y luego determinó cuántos números sumó para llegar a 17. Exactamente. ¿Hay algo más Carmen que usted vio diferente o algún comentario?

Carmen: No profe, por ahora ninguno.

Facilitadora: ¡Gracias! Bueno entonces aquí está el diálogo dice: Aquí está la estrategia de Julián (la volví a copiar abajo para que la vean), tomen un minuto para revisarla (ya lo hicimos) y traten de entender que hizo Julián. ¿Puede alguien decirme qué nota?. Entonces Kimberly le dice: yo noto que él escribió los números de Josué y su hermano (estos que están aquí). ¿Cuáles números? (vean que está claro que Kimberly entendió, pero al hacer esta pregunta lo que hace es que ayuda a que los demás se concentren en esta parte de la solución y vayan comprendiendo qué es lo que hizo Josué). Okay 17 y nueve, muy bien. ¿Alguien más puede ver eso, alguien ve algo más? ¿César? Entonces César dice: a la par del 9 puso los números 10, 11, 12 y 13 hasta 17. ¿Quién puede decirnos algo más sobre los números que César menciona?

**Explicando la estrategia de otra persona - Dígame una cosa**

- Docente: Aquí está la estrategia de Julián. Tomen un minuto para revisarla. Trate de entender qué hizo Julián. (pausa por 30 segundos) ¿Puede alguien decirme qué nota? Kimberly?
- Kimberly: Yo noto que él escribió los números de Josué y su hermana.
- Docente: ¿Cuáles números?
- Kimberly: 17 y 9.
- Docente: Muy bien. ¿Alguien más puede ver eso? ¿Alguien más ve algo más? ¿César?
- César: A la par del 9 puso los números 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.
- Docente: ¿Quién puede decirnos algo más sobre los números que César menciona?

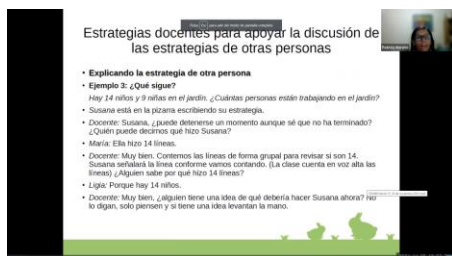
Diagrama de la estrategia de Julián:

10 11 12 13 14 15 16 17

1 2 3 4 5 6 7 8

Entonces ahí se puede; lo que decía Claudia verdad, bueno aquí están estos números que completan hasta 17 y después aquí escribió los números para saber cuántos números sumó. Vean que esta estrategia se llama “dígame una cosa”. Entonces le preguntó a Kimberly primero y después le pregunto a otra persona qué pasó después, y así se pueden seguir haciendo preguntas como para ir desmenuzando la solución y este que varias personas vayan explicando por pedazos qué fue lo que, lo que observaron, o lo que entienden. Entonces eso ayuda a que usen su propio lenguaje, su propio razonamiento y que se escuchen entre ellos.

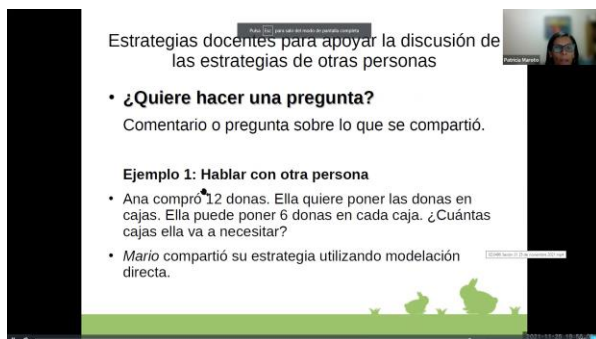
Aquí hay otro, otro ejemplo. Está también dice explicando la estrategia de otra persona y es “qué sigue”. Entonces dice: hay 14 niños y 9 niñas en el jardín, ¿cuántas personas están trabajando en el jardín? Entonces Susana está escribiendo en la pizarra su estrategia y la docente le dice: Susana puede detenerse un momento aunque sé que no ha terminado. ¿Quién puede decirnos qué hizo Susan?



Entonces vean que este es “qué sigue”, entonces no se termina de dibujar o escribir la solución, sino que se escribe una parte y a partir de ahí se pregunta qué es lo que está haciendo Susana, qué entiendo de lo que está haciendo Susana. Y luego se puede preguntar: ¿qué vamos a hacer después? Aquí dice: ¿quién puede decirnos que hizo Susana? Entonces María dice ella: “Ella hizo 14 líneas” y la docente le dice: “Muy bien”, entonces contemos las líneas de forma grupal para revisar si son 14. Entonces se van contando las líneas, que dibujó los 14 niños. Entonces: ¿alguien sabe por qué hizo 14 líneas? Bueno, porque hay 14 niños. Muy bien, ¿alguien tiene alguna idea de que debería hacer Susana ahora? No lo digan, solo piénsenlo y si tienen una idea levantan la mano. Bueno entonces ya Susana hizo las 14 líneas nada más, hasta ahí llegó la solución que tiene en la pizarra y a partir de ahí entonces pregunto: ¿qué haríamos después para seguir resolviendo el problema? Entonces eso también obliga a pensar.

Los autores del libro lo que dicen es que al principio lo que ustedes les preguntan, digamos en este caso Susana, ¿qué fue lo que hizo Susana?, entonces van a decir que hizo un dibujo o que usó, si están usando material concreto, que usó los cubos azules, rojos o verdes o qué sé yo, pero esas son respuestas muy generales. Entonces la intención es que, con las preguntas, por ejemplo: ¿alguien sabe por qué hizo 14 líneas? Entonces son preguntas mucho más específicas para obligarles a pensar en función del contexto en el que está el problema, ya no sólo hizo un dibujo, no. Bueno por qué hizo ese dibujo, qué representan esas líneas, eso ayuda a concentrarse en detalles.

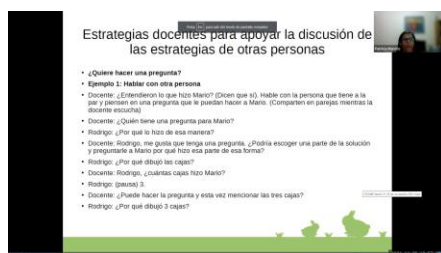
Otra posibilidad es hacer una pregunta; entonces bueno, por ejemplo, en este caso tenemos: Ana compró 12 donas. Ella quiere poner las donas en cajas. Ella puede poner 6 donas en cada caja. ¿Cuántas cajas ella va a necesitar?



Entonces Mario comparte una estrategia que usó utilizando modelación directa. Podría ser qué sé yo, como decía Claudia hacer un cuadro y en el cuadro dibujar 6 donas, eso es una

caja, luego poner otras seis horas en otro cuadro, y ahí entonces se va a dar cuenta que tiene, que necesita dos cajas para dar las 12 donas. Entonces aquí viene el diálogo. Dice: ¿Entendieron lo que hizo Mario? Entonces el estudiantado dice que sí. Hable con la persona que tiene a la par y piensen una pregunta que le puedan hacer a Mario. Entonces, bueno, ya escucharon la solución, ¿que le quieren preguntar a esa persona? Entonces la docente ya después pregunta: ¿Quién tiene una pregunta para Mario, entonces Rodrigo dice: ¿Por qué lo hizo de esa manera? y la docente le dice: Rodrigo me gusta que tenga esa pregunta. Podría escoger una parte de la solución y preguntarle a Mario por qué hizo esa parte de esa forma.

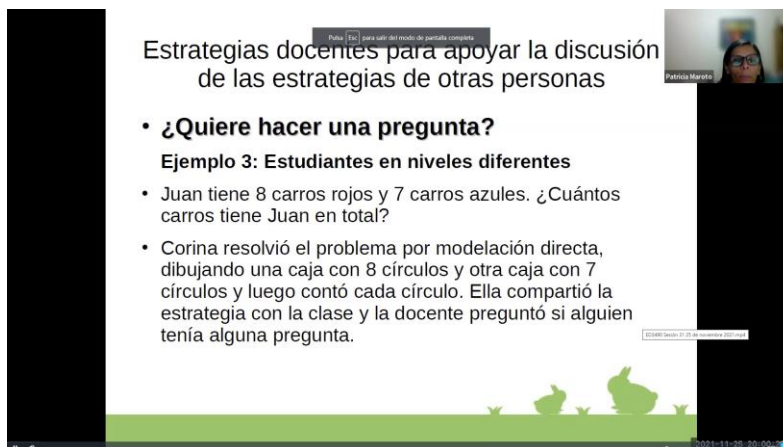
Entonces vean que aquí otra vez lo que hace es obligar a Rodrigo a pensar en un detalle, no hacerlo así, como en general para toda la solución del problema sino escoger un detalle. Entonces ya Rodrigo lo que pregunta es: ¿por qué dibujó las cajas? Entonces la docente ya le hace una pregunta a Rodrigo: ¿cuántas cajas hizo Mario? Entonces Rodrigo dice que 3, Mario hizo tres cajas. Entonces la docente le dice: ¿puede hacer la pregunta y esta vez mencionar las tres cajas? Entonces Rodrigo le pregunta: ¿por qué dibujó tres cajas? Entonces lo que hace la docente es ir enfocando ahora. En este caso pareciera que hay un error en la solución porque Mario dibujo tres cajas en lugar de dos, pero entonces con las preguntas que hace la docente, Rodrigo tiene que ir enfocando sus preguntas de manera de que, por ejemplo, esta última que está aquí, se concentra en el error. Bueno, dígame por qué hizo tres cajas, tal vez cuando Mario empiece a contar se va a dar cuenta que si hace tres cajas se está pasando de las doce donas.



Este es otro ejemplo, dice: poner atención a los detalles; Sofía tenía cinco globos. Su amigo le dio once globos más. ¿Cuántos globos tiene Sofía ahora? Entonces Sara resolvió el problema contando con los dedos 12, 13, 14, 15, 16, empieza en 11 y cuenta levantando un dedo para cada número y la docente repite la respuesta que da Sara. Ahí ponemos atención a esos detalles, de dónde empezó y cómo fue que lo hizo. Entonces aquí el diálogo. Dice: Miguel dice; no entiendo por qué no contó desde 5, entonces Sara dice yo tengo 5 globos rojos y me dan 11 más y 11 es más rápido. Entonces la docente dice: ¿Puede decirle a Miguel por qué 11 es más rápido. ¿Alguien más tiene alguna idea de por qué es más rápido? Entonces Sara dice: “Porque no tienen que contar muchos números empieza con el mayor y es lo mismo”. Entonces aquí alguien podría empezar con los 5 globos y contar 11 más pero también pueden empezar con los 11 globos y contar solo 5. Veán que la discusión gira en torno a que se puede hacer de una forma, se puede hacer de la otra, se van a dar cuenta que la respuesta a la misma y, además, hay la discusión de por qué si empiezo en 11 entonces es más rápido contarlos verdad. Entonces eso ayuda a ir poniendo atención en esos detalles y tal vez ya la próxima vez que resuelvan un

problema parecido, o que tengan que hacer una suma, ya entiendan que es más fácil si empiezan a partir del número que sea el mayor, pero hay que ir poniendo atención a esos detalles.

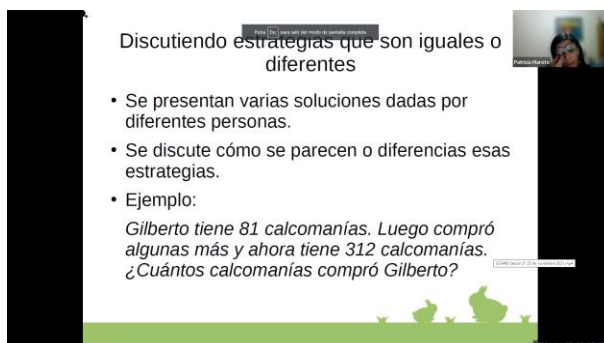
Aquí hay otro que dice “quiere hacer una pregunta”. Entonces dice: Juan tiene 18 carros rojos y 7 carros azules. ¿Cuántos carros tiene Juan en total? Entonces Corina resolvió el problema por modelación directa, dibujó una caja con 8 círculos y otra caja con 7 círculos y luego contó todos los círculos. Ella compartió la estrategia con la clase y la docente preguntó si alguien tenía alguna pregunta. Entonces Tobías le dice: “No hubiera sido más fácil mover dos carros azules a la caja de los rojos para hacer 10” y entonces fácilmente puede sumar los 5 para tener 15, verdad, como aquí son 8 le sumó 2 son 10 y si le quito 2 son 5, entonces la docente le pregunta a Corina si entendió lo que dijo Tobías. Entonces Corina dice: “Pero usted no puede moverlos en una caja son rojos y en otra son azules, no se pueden mezclar. Y entonces bueno, alguien más quiero opinar, entonces ahí se puede generar una discusión de por qué si se pueden mover, o por qué no se pueden mover, o cuáles son las condiciones para moverlos qué sé yo, entonces tal vez eso vaya ayudando a Corina a darse cuenta que no importa el color del carro, pero si está contando lo importante es completa la decena y que sea ya un número más fácil.



Estrategias docentes para apoyar la discusión de las estrategias de otras personas

- **¿Quiere hacer una pregunta?**  
**Ejemplo 3: Estudiantes en niveles diferentes**
  - Juan tiene 8 carros rojos y 7 carros azules. ¿Cuántos carros tiene Juan en total?
  - Corina resolvió el problema por modelación directa, dibujando una caja con 8 círculos y otra caja con 7 círculos y luego contó cada círculo. Ella compartió la estrategia con la clase y la docente preguntó si alguien tenía alguna pregunta.

Luego tenemos (para ver cuánto nos queda de esta presentación, ya vamos a terminar), “Discutiendo estrategias que son iguales o diferentes”. Entonces se presentan varias soluciones dadas por diferentes personas y se discuten cómo se parecen o diferencian esas estrategias. Por ejemplo: Gilberto tiene 81 calcomanías, luego compró alguna de más y ahora tiene 312. ¿Cuántas calcomanías compró Gilberto?



Discutiendo estrategias que son iguales o diferentes

- Se presentan varias soluciones dadas por diferentes personas.
- Se discute cómo se parecen o diferencian esas estrategias.
- Ejemplo:  
*Gilberto tiene 81 calcomanías. Luego compró algunas más y ahora tiene 312 calcomanías. ¿Cuántas calcomanías compró Gilberto?*

Y entonces aquí hay cinco soluciones diferentes. Por ejemplo, aquí está la que hizo Isaías, ahí está la que la quiso Gilberto, bueno Gilberto era el nombre del actor en el problema. Entonces aquí hay 5 soluciones, que supuestamente se escribieron en la pizarra, entonces uno puede, por ejemplo, Isaías usó sumas, empezó en el 81 y completó 312. Esta persona también hizo algo parecido, nada más que lo sumó, pero sumó diferente. Primero sumó a 92 luego le sumó 20 más, luego le sumó 200 para llegar, lo que hizo fue ir completando hasta llegar a 312.

Esta otra persona lo que hizo fue más bien restar para llegar a 81, vean que empieza con el 312 y va restando hasta llegar a 81. Igual que esta persona, nada más que vean que las restas son diferentes. Y bueno, aquí hay otra, dice:  $81 + 9$  y puso 90,  $90 + 10$  son 100,  $100 + 200$  son 300,  $300 + 10$  son 310 y luego sumó 2 y da 312, y vean que los que están encerrados en círculos fueron los que sumó. Entonces ahí tenemos otra forma diferente de resolverla.

Luego se genera una discusión entre la docente y los estudiantes, también con respecto a las soluciones. Por ejemplo, Kelly dice que comenzó en 312 le quitó 12 y luego le quitó 300, luego quitó 10 y tengo 290, luego quitó 9 y tengo 281 (es lo que está aquí) luego resté 200 y llegue 81 y luego suma todos estos que restó y le da el resultado. Entonces la docente le dice: “Estoy confundida. Yo pensé que el problema decía que Gilberto tenía 81 calcomanías y que él compró algunas más y que entonces tenía 312. No veo eso en la estrategia que Kelly, ¿alguien podría explicarme?” Entonces David dice: sólo cambie la operación. ¿Qué quiere decir con cambie la operación? En la última usted puede decir  $281 - 200$  es igual a 81 o puede decir que 81 más 200 es 281. Entonces lo que hace en esta, es ver la relación entre esta resta y la suma que se obtiene de sumar  $81 + 200$  y bueno ahí sigue la discusión.

The screenshot shows a video recording of a math lesson. On the left, there is a problem statement in Spanish: "Gilberto tiene 81 calcomanías. Luego compró algunas más y ahora tiene 312 calcomanías. ¿Cuántas calcomanías compró Gilberto?". Below the text are five hand-drawn solutions by different students, labeled 'Isaías', 'Gilberto', 'Kelly', 'David', and 'Isaías'. Each solution shows a different strategy to solve the problem. On the right side of the video frame, there is a list of dialogue between the teacher and students, discussing the solutions and the relationship between addition and subtraction.

**Problem Statement:**  
Gilberto tiene 81 calcomanías. Luego compró algunas más y ahora tiene 312 calcomanías. ¿Cuántas calcomanías compró Gilberto?

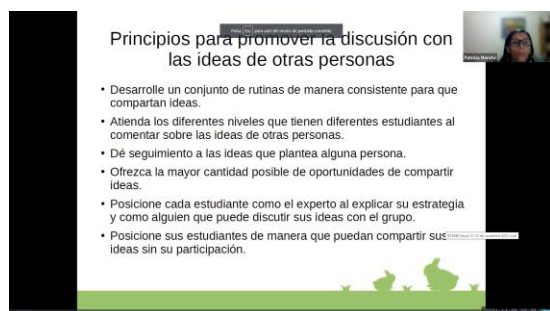
**Solutions:**

- Isaías:**  $81 + 200 = 281$ ,  $281 + 10 = 291$ ,  $291 + 10 = 301$ ,  $301 + 11 = 312$ . (Total added: 231)
- Gilberto:**  $312 - 12 = 300$ ,  $300 - 10 = 290$ ,  $290 - 9 = 281$ ,  $281 - 200 = 81$ .
- Kelly:**  $312 - 12 = 300$ ,  $300 - 10 = 290$ ,  $290 - 9 = 281$ ,  $281 - 200 = 81$ .
- David:**  $81 + 200 = 281$ ,  $281 + 10 = 291$ ,  $291 + 10 = 301$ ,  $301 + 11 = 312$ .
- Isaías:**  $81 + 200 = 281$ ,  $281 + 10 = 291$ ,  $291 + 10 = 301$ ,  $301 + 11 = 312$ .

**Dialogue:**

- Docente: Muy bien, Kelly.
- Kelly: Bueno, comencé con 312, resté 12 y tengo 300. Quité 10 y tengo 290, luego quité 9 y tengo 281. Luego resté 200 y logré 81.
- Docente: Estoy confundida. Yo pensé que el problema decía que Gilberto tenía 81 calcomanías y que él compró algunas más y entonces tenía 312. No veo eso en la estrategia de Kelly. ¿Alguien podría explicarme?
- David: Solo cambie la operación.
- Docente: ¿Qué quiere decir que cambie la operación?
- David: En la última usted puede decir  $281 - 200$  es 81 o puede decir que  $81 + 200$  es 281.
- Docente: Oh, puedo decir que 81 más 200 es 281. ¿Y luego?
- David: 281 más 9 es 290.
- Estudiante: Eso es igual a lo que hizo Isaías.
- Docente: Muy bien, uno a la vez, ¿puede seguir explicando lo que piensa (se dirige a David)?
- David:  $281 + 9$  es igual a 290, 290 más 10 es 300, más 12 es 312.

Entonces vean que la idea es eso, ir haciendo comparaciones, ver que a veces se resta, que a veces suma, cómo se parecen, por qué se llega al resultado, entonces, la intención es buscar las preguntas adecuadas para que ellos necesiten argumentar. Aquí es un resumen de las ideas más importantes.



Dice: desarrolle un conjunto de rutinas de manera consistente, o sea, hay que hacerlo que ojalá todas las clases haya algún ratito de discusión. Atender a los diferentes niveles que tienen diferentes estudiantes al comentar las ideas de otras personas. Creo que les decía antes, por ejemplo, empezar tal vez con la solución más sencilla y a partir de ahí construir, o empezar con una que tenga un error y a partir de ahí construir un poco. Dar seguimiento a las ideas que plantea alguna persona. Bueno, alguien la explica y a partir de ahí genero preguntas para seguir con la discusión. Ofrezca la mayor cantidad posible de oportunidades para compartir ideas. Posiciona cada estudiante como el experto. Vean que eso lo dijo antes Claudia antes muy bonito, con ese estudiante y en general con todos los que les gusta, pero lo que usted decía de que *Nombre del estudiante* se sentía como el profesor explicando). Entonces darles como ese empoderamiento, esa posibilidad de que se sientan seguros, de que vayan y que se sientan con la comodidad de poder hablar ante el grupo. Y luego posicionar a los estudiantes de manera que puedan compartir las ideas sin su participación. Entonces tal vez no siempre preguntar a ustedes sino tratar en la medida lo posible de que se vaya generando una dinámica donde ellos más bien se pregunten entre ellos y usted nada más escucha a ver qué sucede. Bueno, así un poco en carreras, pero no quería dejar de compartirles estas ideas porque a mí me parece interesante estas ideas, cómo podemos ir poco a poco generando más conversación y más discusión en el aula y más construcción de ideas entre ellos. Eso es muy importante en matemática, porque en la medida que ellos comenten y tengan la posibilidad de ver diferentes razonamientos matemáticos, diferentes dibujos, diferentes ideas, pueden ir aprendiendo de sus pares y desarrollando poco a poco más su conocimiento matemático y las herramientas que tienen para resolver problemas y bueno eso sería por hoy, ¡muchas gracias!

Entonces ahí nos ponemos de acuerdo a ver si hacemos una sesión más de trabajo o si hacemos las evaluaciones. El formulario cualitativo les puedo mandar el enlace y ustedes lo llenan cuando quieren, eso no sería problema el que sí me gustaría que hagamos juntas es el matemático como hicimos el primero, no sé si recuerda que era, yo les ponía el ejercicio les daba unos minutos ustedes lo resolvían y así, a ver cómo, cómo nos va.

Carmen: Sí, está bien, profe.

Facilitadora: Y nos falta ponernos de acuerdo con el café también, no se me ha olvidado.

Claudia: Sí.

Carmen: Muy importante también.

Facilitadora: Y ahí me avisa Claudia, cualquier día que usted pueda la otra semana o cuando sea, no me precisa el material.

Claudia: Ah bueno.

Facilitadora: Cuando usted vea que tenga un tiempo.

Carmen: Claudia, usted me escribe para yo alistar el que tengo arriba y así la profe recoge todo de una.

Claudia: De una sola vez. Está bien, perfecto.

Facilitadora: Y bueno, ahí queda el material disponible para cuando lo necesiten.

Claudia: El otro año profe.

Facilitadora: Claro.

Carmen: Hasta luego profe, muchas gracias.

Facilitadora: Que pasen buenas noches.

Claudia: Muchas gracias, buenas noches.

Facilitadora: Buenas noches.