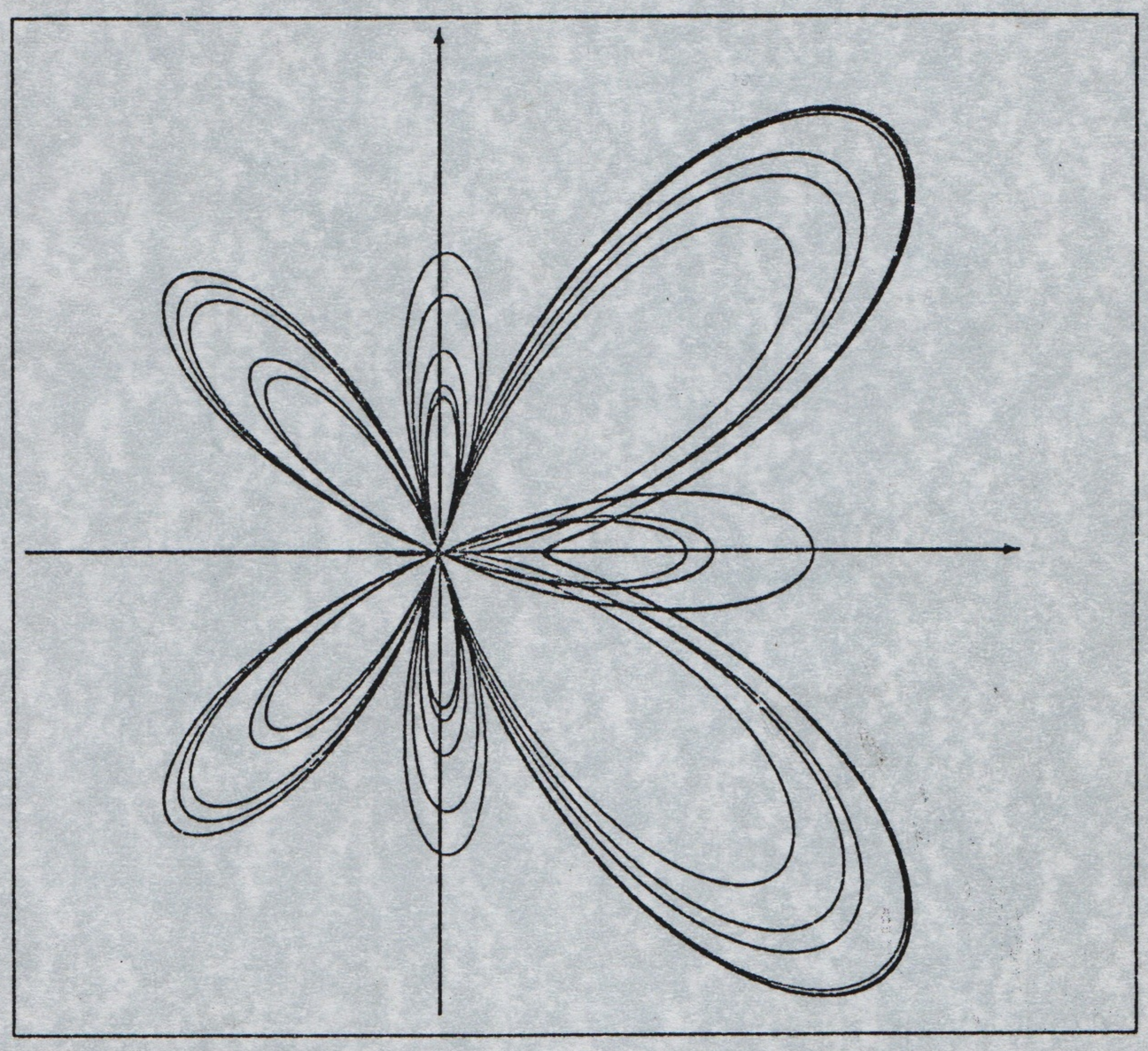
18.08.01
435

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
IIMEC



Serie: CABÉCAR

Elementos de Matemática Computacional

Profa. Marielos Mora
Profa. Floria Arias

2003

PREFACIO

El presente texto es el resultado de la primera etapa de un proyecto del IIMEC en conjunto con la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica. La segunda etapa consiste en la elaboración de una pagina web que complemente el texto.

Su objetivo es ofrecer a los estudiantes el material teórico y practico de estudio en el curso de Matemática para Computación I.

Siendo este el primer curso de matemática para los estudiantes de la carrera en Computación e Informática, su programa consiste en la introducción a varios temas de la matemática sin avanzar profundamente en ninguno de ellos. En cursos siguientes como Matemáticas Discretas, Calculo Diferencial e Integral I y II, entre otros, se vuelve al estudio de los mismos temas enfatizando en las aplicaciones.

En el orden del programa el texto desarrolla siete capítulos; Introducción a la Lógica, Elementos de la teoría de conjuntos, Inducción Matemática, Divisibilidad, Sistemas Numéricos, Relaciones Binarias y Funciones

Se escribe pensando en los estudiantes como alumnos de primer año, que recién comienzan a leer y escribir matemática. Se eliminan las demostraciones largas o complejas. Así, las demostraciones de teoremas que se incluyen son aquellas que tienen una estructura lógica sencilla y que no se basan en cálculos complejos o resultados no familiares para los estudiantes.

Contenidos

1 Introducción a la lógica **3**

1.1 Proposiciones compuestas 4
1.2 Construcción de tablas de verdad 8
1.3 Tautologías y contradicciones 9
1.4 Proposiciones equivalentes 11
1.5 Implicaciones lógicas 15
1.6 Demostraciones formales 18
1.7 Cuantificadores 22

2 Teoría de conjuntos **29**

2.1 Operaciones con conjuntos 32
2.2 Partición de un conjunto 34
2.3 Producto cartesiano 35

3 Inducción Matemática **39**

3.1 Sucesión 39
3.2 Sucesiones recursivas. 45

4 Divisivilidad **49**

4.1 Numeros primos 52
4.2 Máximo Común Divisor (MCD) 52
4.3 Mínimo Común Múltiplo (MCM). 55

5 Sistemas numéricos **59**

5.1 Forma decimal de los racionales 59
5.2 Orden en $\mathbb{Q}$ 60
5.2.1 Densidad en $\mathbb{Q}$. 61
5.2.2 $\mathbb{Q}$ es totalmente ordenado 61
5.3 El sistema de los números reales 63
5.4 Orden en $\mathbb{R}$ 65
5.4.1 Valor absoluto 65
5.4.2 Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ 66

Instituto de Investigación
para el Mejoramiento de la
Educación Costarricense (IIMEC)
Facultad de Educación

6 Relaciones Binarias **71**
6.1 Propiedades de las relaciones 73
6.2 Clases de equivalencia 75
6.3 Relaciones de orden 76
6.4 Orden total y orden parcial 77
6.5 Ejercicios 78

7 Funciones **83**
7.1 Operaciones con funciones 85
7.2 Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas 86
7.3 Función Inversa 87
7.4 Funciones pares e impares 89
7.5 Funciones monótonas 89

Capítulo 1

Introducción a la lógica

Si aumenta la temperatura, se deshacen los glaciares. Si quemamos los desechos, entonces se reduce la capa de ozono. Si se reduce la capa de ozono, se filtran más rayos ultravioletas. Si se filtran más rayos ultravioletas, aumenta la temperatura. No se deshacen los glaciares. Por lo tanto, reciclamos.

Razonamientos como el anterior se denominan "argumentos". Determinar la veracidad o no de un argumento, es uno de los objetivos de este capítulo, para ello se hace necesario, conocer primero algunos elementos básicos de la lógica. La lógica se ocupa de establecer métodos de razonamiento que separan los razonamientos válidos de los no válidos.

Definición 1.0.1 *Proposición o enunciado: es una afirmación que es falsa o verdadera pero no ambas.*

Ejemplo

1. Luis vino a clases hoy.
2. Amaneció lloviendo.
3. $5 - 8 = 3$.
4. Leibniz es un matemático famoso.

La veracidad o falsedad de una proposición se llama valor de verdad. Así por ejemplo, si hoy amaneció lloviendo, entonces el valor de verdad de la proposición (2) es verdadero, de lo contrario su valor de verdad es falso.

Las proposiciones se denotan con letras minúsculas p, q, r, ...

No son proposiciones o enunciados expresiones como: una orden, una pregunta o bien una expresión que involucra variables no definidas.

Ejemplo

1. Debes tener listo el material para mañana.
2. ¿Cuánto tiempo vas a estar aquí?
3. $x \div y = y \div x$.

1.1 Proposiciones compuestas

Todos los ejemplos de proposiciones dados anteriormente son proposiciones simples. Una proposicion compuesta es la combinación de dos o más proposiciones simples ligadas mediante conectivas. Son ejemplos de conectivas y ; o; sí . . . , entonces; etc.

Las proposiciones compuestas se denotan con letras mayúsculas.

El valor de verdad de una proposición compuesta está determinado por el valor de verdad de cada una de las proposiciones simples que la conforman y por la o las conectivas involucradas.

A continuación se detallará en algunas de las conectivas lógicas.

1. **Negación**

   Negar una proposición es afirmar otra. Si p es una proposición, entonces "no p" es la negación de p.

   La negación de una proposición también es posible expresarla anteponiendo la frase "es falso que " o " no se cumple que".

   La negación de un enunciado resulta verdadera si el valor de verdad del enunciado original es falso, y la negación de un enunciado resulta falsa si el enunciado es verdadero. Así por ejemplo:

   Sea p: Acapulco es la capital de México, entonces la negación de p, que se denota $\neg p$ es

   $\neg p$: Acapulco no es la capital de México.

   Note que p es falsa de ahí que $\neg p$ es verdadera. En otras palabras p y $\neg p$ siempre tienen valores de verdad opuestos. Note además que para negar una proposición, se antepone el símbolo $\neg$ a la letra que denota la proposición original.

   Los valores de verdad de una proposicióny su negación pueden representarse más brevemente en una tabla, llamada tabla de verdad, de la manera siguiente:

p	$\neg p$
1	0
0	1

   ¿Qué dice la tabla?

   (a) En la primera columna se colocan los valores de verdad de la proposición original, denotada p, que puede ser verdadera o falsa, esto se indica 1 o 0 respectivamente.

   (b) En la segunda columna, la nueva proposición $\neg p$, que resume: si p es verdadera, entonces $\neg p$ es falsa y si p es falsa entonces $\neg p$ es verdadera.

   ¡Piense! Si p es falso, cuál es el valor de verdad de $\neg\neg p$.

2. **Conjunción** .

   Cuando dos enunciados se combinan con la palabra "y" , el enunciado resultante se llama conjunción. Para denotar la conjunción se utiliza el símbolo " $\wedge$ ". Así por ejemplo si:

p: Marta llegó tarde.

q: Marta presentó la prueba.

Expresar cada una de las siguientes proposiciones compuestas:

(a) Marta llegó tarde y presentó la prueba: $p \wedge q$.

(b) Marta llegó tarde y no presentó la prueba: $p \wedge \neg q$.

(c) Marta ni llegó tarde, ni presentó la prueba: $\neg p \wedge \neg q$.

El valor de verdad de una proposición de la forma $p \wedge q$ depende de los valores de verdad de p y de q. Una conjunción es verdadera si ambas componentes son verdaderas y es falsa si alguna de las componentes es falsa. La siguiente tabla de verdad expone cuales son los valores de verdad que asume una conjunción en todos los casos posibles:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

¡Piense! Si la proposición $p \wedge \neg q$ resulta verdadera, ¿cuáles son los valores de verdad de p y q?

3. **Disjunción**

La proposición resultante de dos proposiciones conectadas con la palabra "o" se llama disjunción.

Debe distinguirse entre dos tipos de disjunción, la inclusiva y la exclusiva. Una disjunción inclusiva es aquella en la que la proposición resulta verdadera sí al menos una de las proposiciones involucradas es verdadera. La proposición "Luis estudió francés o estudió inglés", es falsa sólo sí Luis no estudió estos dos idiomas, de lo contrario es verdadera.

La disjunción inclusiva se denota con el símbolo " $\vee$ " y su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Una disjunción exclusiva es aquella en la que la proposición resulta verdadera cuando exactamente una de las proposiciones es verdadera y la otra falsa. Por ejemplo: "Cata irá hoy a las 8:00 pm al cine o al teatro."

La disjunción exclusiva se denota con el símbolo $\underline{\vee}$ y su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \underline{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ejercicios 1.1

1. Sean a, b, c las proposiciones siguientes

   a: "me levanto temprano".

   b: "es lunes".

   c:"voy a clases".

   Traduzca cada proposición siguiente, usando notación lógica.

   (a) Es lunes y me levanto temprano.

   (b) Voy a clases o no me levanto temprano.

   (c) Ni me levanto temprano, ni voy a clases.

2. Determine el valor de verdad de cada proposición, según los valores de verdad dados: p: falso, q: verdadero, r: falso.

   a) $p \wedge q$ b) $(p \wedge q) \vee r$ c) $\neg(p \vee q)$

   d) $p \wedge \neg q$ e) $(\neg p \vee \neg q) \wedge r$ f) $p \underline{\vee} \neg(q \wedge r)$

3. Suponga que $p \wedge q$ es verdadero, proporcione los valores de verdad para:

   a) $p \wedge \neg q$ c) $p \underline{\vee} q$ e) $\neg(p \vee q)$

   b) $p \vee q$ d) $\neg p \wedge \neg q$

4. **Condicional**

   Un enunciado condicional se obtiene al colocar la palabra "si" antes de la primera proposición y la palabra "entonces" antes de la segunda. La proposición que se encuentra entre el "sí" y el "entonces" se llama antecedente y la proposición que aparece luego del "entonces", consecuente.

   Ejemplo

   "Si en un papel de tornasol azul se coloca un ácido, entonces el papel se volverá rojo".

   Un condicional es también llamado una implicación. El antecedente implica el consecuente, de manera que el consecuente resultará verdadero, si el antecedente lo es.

   Al igual que las conectivas anteriores, el valor de verdad de una implicación está determinado por los valores de verdad de sus proposiciones simples (antecedente y consecuente).

La siguiente tabla de verdad muestra los valores de verdad que puede tomar un condicional:

p	q	$p \longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Note que el condicional resulta falso únicamente en el caso en el que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. Es decir, para que $p \longrightarrow q$ sea falso debe ser verdadera la proposición compuesta: $p \wedge \neg q$, puesto que $p \wedge \neg q$ es verdadero sólo sí p es verdadero y q falso y es presisamente en este caso donde $p \longrightarrow q$ es falso. En conclusión, la negación de $p \longrightarrow q$ es $p \wedge \neg q$; más adelante se detallará en este aspecto.

A partir de un condicional "$p \longrightarrow q$", es posible formular otros condicionales que involucran a p y a q:

(*) $q \longrightarrow p$: esta proposición se llama la recíproca de $p \longrightarrow q$:

(*) $\neg q \longrightarrow \neg p$: esta proposición se llama la contrapositiva de $p \longrightarrow q$.

Con respecto a los valores de verdad que toman estas proposiciones debe decirse que:

a) el valor de verdad de $p \longrightarrow q$ no determina el valor de verdad de su recíproca $q \longrightarrow p$.

Así por ejemplo: La proposición "Si dos águlos son alternos externos entre paralelas, entonces son congruentes"; es verdad mientras que su recíproca es falsa.

Sin embargo, la proposición "sí n^2 es par, entonces n es par; $n \in \mathbb{N}$" es verdadera y su recíproca también lo es.

b) el valor de verdad de $p \longrightarrow q$ determina el valor de verdad de su contrapositiva. Es decir las proposiciones $p \longrightarrow q$ y $\neg q \longrightarrow \neg p$ poseen los mismos valores de verdad para los mismos valores de verdad en sus proposiciones simples. Lo anterior puede apreciarse claramente observando sus tablas de verdad:

p	q	$p \longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \longrightarrow \neg p$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Ejemplos : Las parejas de proposiciones siguientes corresponden a la proposición y su contrapositiva, note que cada pareja posee el mismo valor de verdad.

a_1) $x < 4 \longrightarrow x < 2;\ x \in \mathbb{R}$.

a_2) $x \geq 2 \longrightarrow x \geq 4;\ x \in \mathbb{R}$.

b_1) Si el lunes amanece lloviendo, entonces no vengo a clases.

b_2) Si vengo a clases el lunes, entonces no amaneció lloviendo.

5. Bicondicional

La última conectiva de interés es el bicondicional, que se simboliza $\longleftrightarrow$. Un enunciado bicondicional es la conjunción de dos condicionales, donde el antecedente de uno es el consecuente del otro y viceversa. Simbólicamente:

$$P \longleftrightarrow Q \equiv (P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P),$$

que se lee "P sí sólo sí Q es equivalente a P implica Q y Q implica P".

Ejemplos

(a) La proposición: "Aumentar la producción implica bajar la pobreza y bajar la pobreza implica aumentar la producción" es equivalente a la afirmación: "Aumentar la producción sí sólo sí bajar la pobreza".

(b) "Un triángulo es equilátero sí y sólo sí es equiángulo".

Los valores de verdad de una proposición bicondicional están dados por la tabla

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Es decir un bicondicional es verdadero cuando sus dos proposiciones poseen el mismo valor de verdad, de lo contrario es falso.

1.2 Construcción de tablas de verdad

A partir de las tablas básicas estudiadas es posible determinar los valores de verdad de proposiciones que involucran dos o más conectivas, mediante el uso de tablas de verdad.

No hay una única forma de plantear una tabla de verdad para una proposición, pero a continuación algunas sugerencias.

La tabla se inicia colocando tantas columnas como proposiciones simples involucradas hay y tantos renglones como posibles combinaciones hay entre los valores de verdad de cada una.

Se coloca luego, una columna por cada conectiva, es decir se ordenan las proposiciones involucradas de la más simple a la más compleja.

Se utilizan las tablas de verdad de cada conectiva, para colocar los valores de verdad en las nuevas columnas.

Ejemplo

Determinar los valores de verdad de cada una de las proposiciones siguientes

1. $p \longrightarrow (p \wedge \neg q)$. Se trata de un condicional, cuyo consecuente es una conjunción. Para determinar sus valores de verdad se requiere de los valores de verdad de p (el antecedente) y de

$(p \wedge \neg q)$, a su vez para determinar el valor de verdad del consecuente se requiere de las tablas de verdad de la $\wedge$ y de la negación.

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \longrightarrow (p \wedge \neg q)$
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
			columna $1 \wedge 3$	columna $1 \wedge 4$

La proposición $p \longrightarrow (p \wedge \neg q)$ es falsa únicamente en el caso en que p y q son verdaderas.

2. $(p \wedge r) \vee (q \longrightarrow \neg r)$. Se trata de una disjunción. Hay involucradas tres proposiciones simples, por lo tanto para iniciar la tabla se requiere de 3 columnas y 8 renglones (es decir 2^3 posibles combinaciones entre los valores de verdad). Para determinar los valores de verdad de la disjunción, debe determinarse primero los valores de verdad de la conjunción $p \wedge r$ y los de la implicación $q \longrightarrow \neg r$, esta última, requiere a su vez de los valores de verdad de $\neg r$; de ahí que un orden conveniente de las proposiciones sea el siguiente:

p	q	r	$p \wedge r$	$\neg r$	$q \longrightarrow \neg r$	$(p \wedge r) \vee (q \longrightarrow \neg r)$
1	1	1				1
1	1	0				1
1	0	1				1
1	0	0				1
0	1	1				0
0	1	0				1
0	0	1				1
0	0	0				1

Complete la tabla y verifique la última columna.

Observe que hay varios detalles a la hora de confeccionar una tabla, ellos son útiles para garantizar una tabla correcta y completa:

1. Si la proposición en estudio contiene n proposiciones simples, entonces la tabla contiene 2^n renglones, es decir, existen 2^n conbinaciones entre los valores de verdad de cada proposición simple.

2. Para no repetir combinaciones el siguiente orden es útil: en la primera columna se coloca 2^{n-1} renglones verdaderos y 2^{n-1} falsos (esto es la mitad del total de filas); en la segunda columna y alternando, se colocan 2^{n-2} verdaderos y 2^{n-2} falsos; en la tercera columna y alternando se colocan 2^{n-3} verdaderos y 2^{n-3} falsos y así hasta la n-ésima columna que se coloca uno verdadero y otro falso.

1.3 Tautologías y contradicciones

Se analizará ahora dos tipos especiales de proposiciones: $P \vee \neg P$ y $P \wedge \neg P$, se han denotado en mayúsculas para resaltar la forma de las proposiciones y no el contenido. Se trata de proposiciones como:

1. Está lloviendo o no está lloviendo.
2. La camisa de Pablo es roja y no es roja.
3. Miguel Echandi fue presidente de Costa Rica o no fue presidente.
4. Graham Bell inventó el teléfono y no inventó el teléfono.

1. $P \vee \neg P$: es la disjunción de una proposición y su negación; donde P puede ser a su vez compuesta.

   Independientemente de la forma de P (una conjunción o una disjunción, una negacón o una implicación), como proposición que es, es verdadera o falsa, de ahí que toda proposición de la forma $P \vee \neg P$ tiene la siguiente tabla de verdad:

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
1	0	1
0	1	1

   En otras palbras la proposición $P \vee \neg P$ independientemente de los valores de verdad de P, siempre es verdadera, de ahí que reciba el nombre de tautología. Ahora bien, no se está afirmando que toda tautología sea de la forma $P \vee \neg P$.

Definición 1.3.1 *Una tautología es una proposición que siempre es verdadera, independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones simples.*

Verifique que la proposición $p \longrightarrow (p \vee \neg q)$ es una tautología

2. $P \wedge \neg P$: la conjunción de una proposición (simple o compuesta) y su negación tiene la siguiente tabla de verdad:

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
1	0	0
0	1	0

   Es decir, independiente de los valores de verdad de P, la proposición $P \wedge \neg P$ es falsa, de ahí que se llama una contradicción.

Definición 1.3.2 *Una contradicción es una proposición que siempre es falsa, independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones simples.*

Verifique que la proposición $(p \wedge \neg q) \wedge (p \longrightarrow q)$ *es una contradicción.*

Ejercicios 1.2

1. Sean p, q y r las proposiciones siguientes:

   p:"Es lunes",
   q:"hace calor",
   r: "me levanto temprano",
   t: "voy a clases".
   Traduzca cada proposición siguiente, usando notación lógica.

(a) Si es lunes, entonces me levanto temprano y voy a clases.

(b) Si hace calor, entonces no me levanto temprano.

(c) Voy a clases si y sólo si no hace calor.

(d) Si no es lunes, ni hace calor, entonces no voy a clases.

2. Enuncie la recíproca y la contrapositiva de cada una de las siguientes proposiciones:

(a) Si mejora su rendimiento, entonces ganará el curso.

(b) Si no está lloviendo, entonces hace calor.

(c) Si $x < 8$, entonces $x^2 < 64$; $x \in \mathbb{R}$.

(d) Si $x^2 = 1$, entonces $x = 1$ o $x = -1$.

3. Construya la tabla de verdad de cada una de las proposiciones siguientes.

(a) $(p \longrightarrow r) \wedge (r \vee p)$.

(b) $(a \wedge b) \longrightarrow r$.

(c) $\neg p \wedge (q \longrightarrow r)$.

(d) $(p \wedge \neg q) \longrightarrow (q \longrightarrow r)$.

4. Muestre que las siguientes proposiciones son tautologías

(a) $\neg(p \vee q) \longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

(b) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow [(p \vee r) \longrightarrow (q \vee r)]$.

5. Si la proposición $p \longrightarrow q$ es falsa, determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

(a) $p \vee \neg q$.

(b) $\neg p \wedge \neg q$.

(c) $q \longrightarrow p$

1.4 Proposiciones equivalentes

En páginas anteriores se definió el bicondicional de P y Q como:

$$P \longleftrightarrow Q \equiv (P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$$

El símbolo $\equiv$ está conectando dos proposiciones, si se plantean por aparte las tablas de verdad de ambas proposiciones:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

P	Q	$P \longrightarrow Q$	$Q \longrightarrow P$	$(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

observe que ambas poseen los mismos valores de verdad para los mismos valores de verdad en sus proposiciones simples; de ahí que parejas de proposiciones como estas, se denominan proposiciones lógicamente equivalentes.

Definición 1.4.1 *Dos proposiciones son lógicamente equivalentes si poseen los mismos valores de verdad, para los mismos valores de verdad en sus proposiciones simples.*

Es posible afirmar también, que dos proposiciones R y T son lógicamente equivalentes si la proposición compuesta $R \leftrightarrow T$ resulta una tautología. De manera que, para mostrar la equivalencia de dos proposiciones se tienen dos opciones: plantear dos tablas de verdad, una con cada proposición, como se hizo arriba o bien, una sola tabla conectando ambas proposiciones con un bicondicional y obteniendo una tautología.

Ejemplo Mostrar que las proposiciones $P: \neg(r \wedge t)$ y $Q: (\neg r \vee \neg t)$ son lógicamente equivalentes

r	t	$r \wedge t$	$\neg(r \wedge t)$	$\leftrightarrow$	$\neg r \vee \neg t$	$\neg r$	$\neg t$
1	1	1	0	**1**	0	0	0
1	0	0	1	**1**	1	0	1
0	1	0	1	**1**	1	1	0
0	0	0	1	**1**	1	1	1

Se ha mostrado que $P \leftrightarrow Q$ es una tautología, de ahí que $P \equiv Q$.

En la tabla 1 se presentan algunas equivalencias lógicas, que resultarán útiles para mostrar otras equivalencias más elaboradas. Por otra parte, al inicio del capítulo se afirmó que uno de los objetivos era mostrar la validez de un argumento, basados en ciertas reglas. En todos los casos el lector puede plantear la tabla de verdad correspondiente y verificar así que se tratan de tautologías.

A la mayoría de las equivalencias se le ha asignado un nombre que nos sugiere de que propiedad se trata y posterior a la tabla aparecen algunos comentarios que pueden ayudar a una mejor comprensión de la misma.

Tabla 1. Equivalencias lógicas.

1. Doble negación

   $\neg\neg P \equiv P$

2. Leyes conmutativas

   (a) $P \vee Q \equiv Q \vee P$

   (b) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

   (c) $P \leftrightarrow Q \equiv Q \leftrightarrow P$

3. Leyes asociativas

   (a) $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$

   (b) $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$

4. Leyes distributivas

   (a) $(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

   (b) $(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

5. Leyes de idempotencia

   (a) $P \vee P \equiv P$

   (b) $P \wedge P \equiv P$

6. Leyes de identidad[1]

   (a) $P \vee C \equiv P$

   (b) $P \vee T \equiv T$

   (c) $P \wedge C \equiv C$

   (d) $P \wedge T \equiv P$

7. (a) $P \vee \neg P \equiv T$

   (b) $P \wedge \neg P \equiv C$

8. Leyes de De Morgan

   (a) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

   (b) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

9. Contrapositiva

   $P \longrightarrow Q \equiv \neg Q \longrightarrow \neg P$

10. Implicación

    $P \longrightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

11. Negación del condicional

    $\neg(P \longrightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$

12. (a) $P \vee Q \equiv \neg P \longrightarrow Q$

    (b) $P \wedge Q \equiv \neg(P \longrightarrow \neg Q)$

13. (a) $(P \longrightarrow R) \wedge (Q \longrightarrow R) \equiv (P \vee Q) \longrightarrow R$

[1] C y T significan contradicción y tautología respectivamente.

Instituto de Investigación
para el Mejoramiento de la
Educación Costarricense (IIMEC)
Facultad de Educación

(b) $(P \longrightarrow Q) \wedge (P \longrightarrow R) \equiv P \longrightarrow (Q \wedge R)$

14. Equivalencia

$P \leftrightarrow Q \equiv (P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$

15. Ley de exportación

$(P \wedge Q) \longrightarrow R \equiv P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)$

16. Reducción al absurdo

$P \longrightarrow Q \equiv (P \wedge \neg Q) \longrightarrow C$

Note que:

Todas las equivalencias se han escrito con letras mayúsculas, este es un detalle importantísimo que está diciendo que en todos los casos lo que interesa es la forma de la proposición y no el contenido. Así por ejemplo:

i) La regla (1) se refiere a la doble negación, dice que negar dos veces una proposición es equivalente a afirmarla y viceversa, independientemente de quién sea tal proposición, de ahí que:

$^* \neg\neg r \equiv r$ $\qquad$ $^* \neg\neg(p \wedge q) \equiv p \wedge q$ $\qquad$ $^* p \longrightarrow q \equiv \neg\neg(p \longrightarrow q)$

$^* N \equiv \neg\neg N$ $\qquad$ $^* \neg\neg(\neg s) \equiv \neg s$ $\qquad$ $^* a \vee b \equiv \neg\neg(a \vee b)$

ii) La regla (2) afirma que la conjunción, la disjunción y el bicondicional son conmutativas, de manera que tal regla es aplicable a cualquier proposición que tenga una de estas tres formas, sin importar quién sea P o Q, basta con que sean proposiciones, de ahí que:

- $r \vee t \equiv t \vee r$ (regla 2a)
- $\ell \leftrightarrow b \equiv b \leftrightarrow \ell$ (regla 2c)
- $(p \vee q) \wedge m \equiv m \wedge (p \vee q)$ (regla 2b)
- $(a \vee b) \leftrightarrow p \equiv p \leftrightarrow (a \vee b)$ (regla 2c)
- $a \vee (b \longrightarrow c) \equiv (b \longrightarrow c) \vee a$ (regla 2a)

iii) La regla (8) se utiliza con frecuencia, afirma que la negación de una disjunción es equivalente a la conjunción de dos negaciones y la negación de una conjunción es equivalente a la disjunción de dos negaciones. Así por ejemplo

1. Afirmar: "Es falso que, Manuel no es médico y habla francés" es equivalente a decir "Manuel es médico o no habla francés".
2. Afirmar: "Emilia está enferma y faltó a clases hoy" es equivalente a decir "Es falso que, Emilia no está enferma o vino a clases hoy"
3. Combinando reglas anteriores es posible afirmar:

$\neg(p \wedge q) \vee r \equiv r \vee \neg(p \wedge q) \equiv r \vee (\neg p \vee \neg q) \equiv (r \vee \neg p) \vee \neg q \equiv \neg(\neg r \wedge p) \vee \neg q$, etc

iv) La proposición (10 a) permite la transformación de un condicional en una disjunción y viceversa, debe notarse aquí que los elementos del condicional son P y Q, mientras que los de la disjunción son la negación del antecedente con el consecuente en su forma original, note que P o Q no necesariamente son proposiciones simples, así entonces:

- $a \longrightarrow b \equiv \neg a \vee b$
- $a \longrightarrow \neg b \equiv \neg a \vee \neg b$
- $p \longrightarrow (q \wedge r) \equiv \neg p \vee (q \wedge r)$
- $p \vee q \equiv \neg p \longrightarrow q$

1.5 Implicaciones lógicas

Definición 1.5.1 *Dadas dos proposiciones P y Q, se dice que P implica lógicamente Q si cuando P es verdadero, entonces Q es verdadero. Simbólicamente se escribe $P \Longrightarrow Q$ si y sólo si la proposición $P \longrightarrow Q$ es una tautología. Así por ejemplo*

La proposición $(p \wedge q) \longrightarrow p$ es una implicación lógica porque:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \longrightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

es una tautología.

La siguiente tabla, presenta algunas implicaciones lógicas de gran utilidad en la demostración de otras implicaciones o de la validez de argumentos.

Es importante aclarar la diferencia entre una equivalencia y una implicación lógica. En una equivalencia lógica la proposición de la izquierda se puede transformar en la proposición de la derecha y **viceversa** . En una implicación lógica, únicamente la proposición de la izquierda se puede transformar en la proposición de la derecha pero **no viceversa** .

Lo anterior se puede ilustrar fácilmente tomando cualquier proposición de la tabla 2 y construyendo la tabla de verdad no para un $\longrightarrow$ sino en $\leftrightarrow$ y se notará que no se obtiene una tautología. Así entonces, la proposición (18) afirma que si $p \wedge q$ es verdadero de seguro p también lo es, pero que si p es verdadero no se puede asegurar que $p \wedge q$ lo sea, de ahí que $p \longrightarrow (p \wedge q)$ no resulta una tautología.

Tabla 2 Implicaciones lógicas.

17. $P \Longrightarrow (P \vee Q)$	adición
18. $(P \wedge Q) \Longrightarrow P$	simplificación
19. $(P \longrightarrow C) \Longrightarrow \neg P$	absurdo
20. $[P \wedge (P \longrightarrow Q)] \Longrightarrow Q$	modus ponens
21. $[(P \longrightarrow Q) \wedge \neg Q] \Longrightarrow \neg P$	modus tollens
22. $[(P \vee Q) \wedge \neg P] \Longrightarrow Q$	silogismo disyuntivo

23. $P \Longrightarrow [Q \longrightarrow (P \wedge Q)]$

24. $[(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)] \Longrightarrow (P \leftrightarrow R)$ transitividad de $\leftrightarrow$

25. $[(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \longrightarrow R)$ silogismo hipotético

26. (a) $(P \longrightarrow Q) \Longrightarrow [(P \vee R) \longrightarrow (Q \vee R)]$

(b) $(P \longrightarrow Q) \Longrightarrow [(P \wedge R) \longrightarrow (Q \wedge R)]$

(c) $(P \longrightarrow Q) \Longrightarrow [(Q \longrightarrow R) \longrightarrow (P \longrightarrow R)]$

27. Dilemas constructivos

(a) $[(P \longrightarrow Q) \wedge (R \longrightarrow S)] \Longrightarrow [(P \vee R) \longrightarrow (Q \vee S)]$

(b) $[(P \longrightarrow Q) \wedge (R \longrightarrow S)] \Longrightarrow [(P \wedge R) \longrightarrow (Q \wedge S)]$

28. Dilemas destructivos

(a) $[(P \longrightarrow Q) \wedge (R \longrightarrow S)] \Longrightarrow [(\neg Q \vee \neg S)] \longrightarrow [\neg P \vee \neg R]$

(b) $[(P \longrightarrow Q) \wedge (R \longrightarrow S)] \Longrightarrow [(\neg Q \wedge \neg S) \longrightarrow (\neg P \wedge \neg R)]$

Al igual que en las equivalencias lógicas, para utilizar una implicación en la transformación de una proposición lo que interesa es la forma de tal proposición y no el contenido. Por ejemplo:

La proposición (20) afirma que si se tiene un condicional, del cual se sabe que su antecedente es verdadero, se puede asegurar que el consecuente lo es también, sin importar el contenido de estos elementos:

$$[(r \vee m) \wedge [(r \vee m) \longrightarrow h]] \Longrightarrow h$$

Ejercicios 1.3

I Parte :

En cada caso aparece una proposición, aplique la regla que se indica para obtener una equivalencia o una implicación lógica .

1. $p \longrightarrow (q \wedge r)$ (10)

2. $(p \wedge q) \longrightarrow r$ (10)

3. $(p \wedge q) \vee \neg r$ (4)

4. $(\neg p \vee q) \wedge r$ (4)

5. $(m \vee t) \wedge (h \wedge q)$ (4)

6. $(m \vee t) \wedge (h \vee q)$ (4)

7. $\neg [(p \longrightarrow q) \vee r]$ (8)

8. $\neg [(p \wedge q) \vee r]$ (8)

9. $\neg [h \longrightarrow (p \vee r)]$ (11)

10. $\neg[(n \vee t) \longrightarrow s]$ (11)

11. $\neg[(a \vee b) \wedge (r \vee c)]$ (8)

12. $(m \vee t) \wedge s$ (18)

13. $(p \wedge r) \wedge q$ (18)

14. $(p \longrightarrow q) \wedge k$ (18)

15. $r \wedge (\neg p \longrightarrow h)$ (18)

16. $\neg(s \vee m) \wedge (p \longrightarrow a)$ (18)

17. $[\neg t \wedge (\neg t \longrightarrow a)]$ (20)

18. $[(m \longrightarrow n) \wedge m]$ (20)

19. $[(a \vee b) \wedge [(a \vee b) \longrightarrow d]]$ (20)

20. $[r \wedge (r \longrightarrow \neg q)]$ (20)

21. $[r \wedge (p \longrightarrow \neg r)]$ (21)

22. $[(\neg s \longrightarrow h) \wedge \neg h]$ (21)

23. $[[(m \vee h) \longrightarrow (a \wedge b)] \wedge (\neg a \vee \neg b)]$ (21)

24. $[(r \vee \neg m) \wedge m]$ (22)

25. $[\neg p \wedge (\neg q \vee p)]$ (22)

II Parte : En cada caso aparece una equivalencia o una implicación lógica, indique el número de regla que se aplicó.

1. $[(m \vee r) \wedge \neg r] \Longrightarrow m$

2. $s \longrightarrow (p \wedge q) \equiv \neg(p \wedge q) \longrightarrow \neg s$

3. $\neg p \longrightarrow r \equiv p \vee r$

4. $(p \vee q) \wedge a \Longrightarrow a$

5. $(p \vee q) \wedge a \equiv (p \wedge a) \vee (q \wedge a)$

6. $(\neg r \wedge q) \vee (\neg r \wedge p) \equiv \neg r \wedge (q \vee p)$

7. $[a \longrightarrow (m \vee r)] \wedge [(m \vee r) \longrightarrow p] \Longrightarrow (a \longrightarrow p)$

8. $(r \longrightarrow \neg p) \wedge p \Longrightarrow \neg r$

9. $(\neg a \longrightarrow \neg b) \wedge \neg a \Longrightarrow \neg b$

10. $p \longrightarrow r \Longrightarrow (p \longrightarrow r) \vee q$

III Parte Explique por qué las siguientes expresiones no son equivalencias o implicaciones lógicas. ¿Cuál es el error?.

1. $[(p \longrightarrow q) \wedge q] \Longrightarrow p$
2. $[(p \longrightarrow q) \wedge \neg p] \Longrightarrow \neg q$
3. $[p \longrightarrow (q \wedge r)] \Longrightarrow (p \longrightarrow q)$
4. $(p \longrightarrow r) \Longrightarrow (p \vee q) \longrightarrow r$
5. $[(p \wedge r) \longrightarrow (q \wedge r)] \Longrightarrow p \longrightarrow q$

1.6 Demostraciones formales

En este apartado se tratará como plantear demostraciones sin hacer uso de las tablas de verdad, sino más bien utilizando las tablas 1 o 2.

Reglas de sustitución

Anteriormente ya se ha hecho referencia a estas reglas, que se enunciarán ahora formalmente.

1. Si una proposición P es lógicamente equivalente a una proposición Q y a su vez P es lógicamente equivalente a R, entonces R es lógicamente equivalente a Q. Simbólicamente:

$$\text{Si } P \equiv Q \wedge P \equiv R, \text{ entonces } R \equiv Q$$

De igual forma:

$$\text{Si } P \equiv Q \wedge Q \equiv S, \text{ entonces } P \equiv S$$

2. Si una proposición P implica lógicamente Q y P o Q son lógicamente equivalentes a una proposición R, entonces R implica lógicamente Q, o P implica lógicamente R. Simbólicamente

$$\text{Si } P \Longrightarrow Q \wedge P \equiv R, \text{ entonces } R \Longrightarrow Q$$

$$\text{Si } P \Longrightarrow Q \wedge Q \equiv R, \text{ entonces } P \Longrightarrow R$$

El siguiente ejemplo ilustra cómo plantear una demostración haciendo uso de las tablas 1 o 2.

Ejemplo

Demuestre la siguiente equivalencia lógica

$$\neg(p \longrightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

La demostración se trata de partir de una de las dos proposiciones compuestas, transformarla una o más veces utilizando la tabla 1 hasta obtener la otra proposición de la equivalencia.

$$\begin{aligned} \neg(p \longrightarrow q) &\equiv && 10 \\ \neg(\neg p \vee q) &\equiv && 8\,a \\ \neg\neg p \wedge \neg q &\equiv && 1 \\ p \wedge \neg q & && \end{aligned}$$

Resulta más cómodo trabajar hacia abajo. En cada paso se anota el número de regla que se utilizó para realizar la transformación.

¿Qué regla o reglas utilizar?, ¿Cuántos pasos realizar?.

No hay una receta, aquí entra en juego varios factores: el conocimiento de las reglas, la mucha práctica y por consiguiente la creatividad mental.

Definición 1.6.1 *Un argumento es un condicional, cuyo antecedente es la conjunción de dos o más proposiciones y el consecuente es la conclusión que se supone se deriva de dichas proposiciones.*

Simbólicamente: si $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ y c son proposiciones, entonces una expresión de la forma "$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \longrightarrow c$" se llama argumento ("$c$" denota conclusión).

Se trata ahora de probar la validez o no de un argumento.

Aunque en teoría las tablas de verdad son apropiadas para probar la validez o no de un argumento, en la práctica resulta algo complicado de manejar, a medida que aumenta el número de proposiciones. Un método más eficiente es la deducción, un razonamiento deductivo es aquel que permite extraer la conclusión apartir de sus premisas, mediante la utilización sucesiva de equivalencias o implicaciones lógicas.

Ejemplo

Considérese el siguiente argumento y pruebe su validez.

Si aumenta la temperatura, se deshacen los glaciares. Si quemamos los desechos, entonces se reduce la capa de ozono. Si se reduce la capa de ozono, se filtran más rayos ultravioletas. Quemamos los desechos o reciclamos. Si se filtran más rayos ultravioletas, aumenta la temperatura. No se deshacen los glaciares. Por lo tanto, reciclamos.

Se traduce a lenguaje lógico. Sean

a : aumenta la temperatura.

d : se deshacen los glaciares.

q: quemamos los desechos

o: se reduce la capa de ozono

f: se filtran más rayos ultravioletas

r: reciclamos

entonces el argumento es:

(1)	$a \longrightarrow d$	premisa
(2)	$q \longrightarrow o$	"
(3)	$o \longrightarrow f$	"
(4)	$q \vee r$	"
(5)	$f \longrightarrow a$	"
(6)	$\neg d$	"
	$\therefore r$	

Cada proposición anterior a la conclusión se llama premisa. Resulta mas cómodo colocar una premisa por renglón. El símbolo $\therefore$ se lee "por tanto" e indica que sigue la conclusión.

Recuerde que las premisas están conectadas con $\wedge$ y como se trata de un condicional se quiere

probar que la veracidad de las premisas llevan a la veracidad de la conclusión, por lo tanto el condicional es verdadero.

Demostración

(1)	$a \longrightarrow d$	premisa
(2)	$q \longrightarrow o$	"
(3)	$o \longrightarrow f$	"
(4)	$q \vee r$	"
(5)	$f \longrightarrow a$	"
(6)	$\neg d$	"
(7)	$q \longrightarrow f$	$(2) \wedge (3) : 25$
(8)	$q \longrightarrow a$	$(7) \wedge (5) : 25$
(9)	$\neg a$	$(6) \wedge (1) : 21$
(10)	$\neg q$	$(9) \wedge (8) : 21$
(11)	r	$(10) \wedge (4) : 22$

El número después de : indica el número de regla que se utilizó y el número o números anteriores indican las premisas conectadas. La última proposición es la conclusión del argumento.

Nótese que se ha obtenido la conclusión utilizando **todas** las premisas y que no se ha requerido de otra proposición no incluida en el argumento, es decir las premisas deben ser necesarias y suficientes para obtener la conclusión.

La demostración anterior se llama demostración directa, existe otro tipo de demostración formal que se llama "demostración por contradición". Este método se basa en probar que la negación del argumento es falso, por lo tanto el argumento es verdadero.

Ahora bien, negar un argumento significa negar un condicional. En páginas anteriores se probó que $\neg(p \longrightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$, de manera que

$\neg [(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \longrightarrow c] \equiv p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg c$, se trata entonces de agregar como una premisa la negación de la conclusión y probar que la nueva expresión, siempre conduce a una contradicción.

Ejemplo Demuestre por contradicción la validez del siguiente argumento:

" Si Mario o Luisa ganan, entonces pierden Ramiro y Pedro. Mario gana. Por lo tanto Ramiro pierde."

Traducido en lenguaje lógico:

Sea

m : Mario gana

ℓ : Luisa gana

r : Ramiro pierde

p : Pedro pierde

de manera que el argumento se expresa:

(1)	$(m \vee l) \longrightarrow (r \wedge p)$	premisa
(2)	m	premisa
$\therefore$	r	conclusión

La conclusión es r, debe agregarse su negación como una premisa más:

(1)	$(m \vee l) \longrightarrow (r \wedge p)$	premisa
(2)	m	premisa
(3)	$\neg r$	premisa
(4)	$[(m \vee l) \longrightarrow r] \wedge [(m \vee l) \longrightarrow p]$	(1) : 13b
(5)	$(m \vee l) \longrightarrow r$	(4) : 18
(6)	$\neg(m \vee l)$	(5) $\wedge$ (3) : 21
(7)	$\neg m \wedge \neg l$	(6) : 8a
(8)	$\neg m$	(7) : 18
(9)	$(\rightarrow \leftarrow)$	(8) $\wedge$ (2) : 7b

La validez del argumento anterior se puede demostrar también de forma directa, inténtelo. Ahora bien, no se trata de que la validez de todo argumento se pueda demostrar de ambas formas, sino más bien de lograr la demostración más ágil y elegante.

Ejercicios 1.4

cada uno de los siguientes argumentos en notación lógica y proporcione una demostración formal.

1. Si hay inflación hay huelgas. Si hay desempleo también hay huelgas. Hay inflación o hay desempleo. Por lo tanto, hay huelgas (i,h,d).

2. Si estudio, saco buenas notas. Si no estudio, me divierto. Si saco buenas notas, voy de excursión en verano. Si me divierto, gasto más dinero. Estudio o no estudio. Por lo tanto, voy de excursión en verano o gasto más dinero. (e,n,d,v,g).

3. Si paso el curso, iré de viaje. Estudio o trabajo. Si no paso el curso entonces no estudio. No trabajo. Por lo tanto, iré de viaje. (p,v,e,t).

4. Si no voy en taxi y me baño llego tarde. Si no tengo dinero entonces no voy en taxi. No trabajo y no tengo dinero. Llego temprano. Por lo tanto, no me baño. (v,b,t,d,w).

5. Si estudio computación, entonces ganaré mucho dinero. Si estudio arqueología, entonces viajaré mucho. Si gano mucho dinero o viajo mucho, no me aburro. Por lo tanto, si estoy aburrido, no estudié computación ni estudié arqueología. (c,d,a,v,b).

6. Si obtengo el puesto y trabajo duro, entonces me ascenderán. Si me ascienden seré feliz. No seré feliz. Por lo tanto, o no obtendré el puesto o no trabajaré duro. (p,t,a,f).

7. Si estudio, no perderé matemáticas. Si no juego futbol, entonces estudio. Perderé matemáticas. Por lo tanto, jugué futbol. (e,m,j)

8. Si K es entero, entonces K es primo. Si K es par, entonces es compuesto. Si K es primo o es compuesto, entonces es mayor que 3. Por lo tanto, si K no es mayor que 3, no es entero ni es par. (e,r,p,c,m).

9. Si pago la U y compro los libros, entonces me quedaré sin dinero. Si no compro los libros no podré estudiar. Por lo tanto si no me he quedado sin dinero y podré estudiar entonces no pagué la U. (p,c,d,e)

10. Si trabajo, no podré estudiar. trabajo o apruebo matemáticas. No aprobé matemáticas. Por lo tanto, no estudié. (t,e,m)

11. Si Juan es poeta, entonces no tiene dinero. Juan no es feliz o tiene dinero. Juan es feliz. Por lo tanto, no es poeta. (p,d,f)

12. Si salgo temprano, entonces iré al cine o iré a nadar. Iré a nadar si y sólo si no hace frío. Por lo tanto, si no voy al cine, no salí temprano o no hace frío. (t,c,n,f)

13. Mónica dice la verdad o la prensa exagera. Clinton dice la verdad o cometió un error. Si Mónica dice la verdad, entonces Clinton no dice la verdad. La prensa no exagera. Por lo tanto, Clinton cometió un error. (v,p,c,e)

14. Hace color o si está lloviendo entonces hace frío. Está lloviendo o hace frío. Si hace frío, entonces hace calor. Por lo tanto hace color. (contradicción), (c,i,f).

15. Si me levanto temprano y si me baño, entonces voy a trabajar. Si voy a trabajar, entonces ganaré mucho dinero. Me levanto temprano. Por lo tanto, si no gano mucho dinero, entonces no me baño. (t,b,t,d).

16. Si no hago la tarea, entonces no repasaré la materia. Si ordeno mi cuaderno, entonces estaré al día. Si no repaso la materia o si estoy al día, entonces me acostaré tarde. De ahí que, si no me acuesto tarde, entonces hice la tarea y no ordené mi cuaderno. (t,m,o,e,a)

1.7 Cuantificadores

Se tratará ahora un tipo especial de proposiciones, tales como:

(a) Para todo número real mayor que 2, su cuadrado es mayor que 4.

(b) Todos los músicos son personas sensibles.

(c) Algunos ingenieros son poetas.

(d) Existe al menos un triángulo isósceles que es equilátero.

(e) Ningún número racional es entero.

Varias características presentan proposiciones de la forma anterior:

1. Se refieren a un número infinito de proposiciones o a un número muy grande de ellas.
2. Utilizan expresiones como: todos, para todos,algunos, existe alguno.
3. Relacionan elementos de un grupo con elementos de otro.

Para expresar simbólicamente proposiciones como estas, es necesario introducir dos nuevos símbolos:

* El símbolo $\forall$ que se lee "para todo", "para cada" o "para cualquiera" se le llama cuantificador universal, porque se refiere a todos los miembros de cierta clase.

* El símbolo $\exists$ que se lee "existe al menos uno", "para algunos", se le llama cuantificador existencial, porque afirma la existencia de un elemento en particular.

Es necesario además, una nueva notación que permita hacer referencia al grupo que pertenece determinado elemento. Así por ejemplo, si P denota el enunciado "ser feliz", entonces la expresión $P(x)$ significará "x es feliz". La expresión $P(x)$ se llama predicado, el mayor conjunto al que pertenece x se llama universo y x es el sujeto de la proposición.

De manera que las proposiciones iniciales se expresan simbólicamente así:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\ [x > 2 \longrightarrow x^2 > 4]$

(b) $\forall x\ [m(x) \longrightarrow s(x)]$; $m(x)$: x es músico, $s(x)$: x es sensible

(c) $\exists x: i(x) \longrightarrow p(x)$; $i(x)$: x es ingeniero, $p(x)$: x es poeta

(d) $\exists x\ /\ t(x) \longrightarrow e(x)$; $t(x)$: x es un triángulo isósceles, $e(x)$: x es un triángulo equilátero

(e) $\forall x\,[x \in \mathbb{Q} \longrightarrow x \notin \mathbb{Z}]$

El símbolo ":" o "/" se lee "tal que". En el caso del cuantificador universal se acostumbra encerrar entre paréntesis cuadrados la proposición a la que hace referencia. En la práctica se añaden o quitan paréntesis para tener más claridad.

Valores de verdad de una proposición cuantificada .

- La proposición compuesta $\forall x\, p(x)$ tiene los siguientes valores de verdad:
  Verdadero si $p(x)$ es verdadera para toda x en el universo.
  Falso si existe al menos una x tal que $p(x)$ es falso.
  La falsedad de una proposición con el cuantificador universal, puede ser demostrada con un ejemplo que no satisface el predicado; tal ejemplo se llama contraejemplo. Así por ejemplo, en la proposición $\forall x \in \mathbb{R}\ [x^2 \geq 1]$, $x = \frac{1}{2}$ es un contraejemplo pues $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ y es falso que $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 1$.
  Note además, que la vía de los ejemplos no es un buen camino para demostrar la veracidad de las proposiciones de esta forma, ello funciona únicamente en casos en los que el universo contenga un número muy pequeño de elementos.
  Demostrar la veracidad de la proposición $\forall \in \mathbb{N}\ [x^2 \geq 0]$ utilizando ejemplos que hacen verdadero el predicado, $x^2 \geq 0$, es imposible; así también no es suficiente el que algunos o muchos lo cumplan, para garantizar que todos lo hacen.

- La proposición compuesta $\exists x / p(x)$ tiene los siguientes valores de verdad:
  Verdadero si $p(x)$ es verdadera para al menos un x en el universo.
  Falso si $p(x)$ es falsa para toda x en el universo.

Ejemplo

Sea $\mathbb{N}$ el universo y sea $p(x)$: $x^2 - 1 = 0$. La proposición $\forall x\, p(x)$ es falsa, porque afirma que el cuadrado de todo natural menos uno es igual a cero, sin embargo es posible hallar números naturales que no satisfacen la igualdad, por ejemplo $p(3)$ es falsa, porque $3^2 - 1 \neq 0$. Por otra parte la

proposición $\exists x: p(x)$ es verdadera, porque existe al menos un número natural, el 1, tal que $p(x)$ es verdadera.

Debe notarse que en una proposición de la forma $p(x)$, el valor de verdad puede variar al variar el sujeto, mientras que una vez que la variable se cuantifica y se especifica el universo, el valor de verdad no varía con x. La variable x en $\forall x\, p(x)$ o $\exists: p(x)$ se llama variable acotada; está acotada por el cuantificador. La variable x en $p(x)$ se llama variable libre.

Es posible también considerar predicados que están en función de más de una variable e incluso de más de un universo, en tales casos el uso de varios cuantificadores resulta natural. Así por ejemplo, sea U el universo, x, y variables y $p(x, y)$ un predicado de dos variables, existen ocho maneras de aplicar los dos cuantificadores a las dos variables: $\forall x \forall y$, $\forall y \forall x$, $\exists x \exists y$, $\exists y \exists x$, $\forall x \exists y$, $\exists y \forall x$, $\forall y \exists x$, $\exists x \forall y$.

Las dos primeras son lógicamente equivalentes puesto que tienen el mismo significado, de manera similar $\exists x\ \exists y$: $p(x, y)$ y $\exists y\ \exists x$: $p(x, y)$ son lógicamente equivalentes. Las cuatro restantes se analizarán con un ejemplo.

Ejemplo : Sea $\mathbb{R}$ el universo y sea $p(x, y)$: $x + y = 0$, entonces

i) $\forall x \forall y\ p(x, y)$ es falso, porque es posible hallar al menos una pareja de números reales, tales que su suma es diferente de cero; por ejemplo $p(1, 4)$ es falso, $1 + 4 \neq 0$

ii) $\exists x \exists y$: $p(x, y)$ es verdadero porque existe al menos una pareja de números reales cuya suma es cero, por ejemplo $1 + -1 = 0$.

iii) $\forall x \exists y$: $p(x, y)$ esta proposición afirma que para cada número real es posible hallar al menos un real tal que su suma es cero, lo cual es verdadero porque todo número real posee inverso aditivo. Si a es cualquier real, existe su opuesto $-a$ tal que $a + -a = 0$

iv) $\exists y \forall x\ p(x, y)$ esta proposición afirma que existe al menos un número real tal que sumado con cualquier real el resultado es cero, lo cual es falso. Note que $\exists y \forall x$ afirma que es un mismo y para todo los x aunque tal y no tiene que ser único.

v) $\forall y\ \exists\ x$: $p(x, y)$ en este caso particular, la proposición hace la misma afirmación que $\forall x\ \exists$ y: $p(x, y)$. Debe notarse que a cada x le corresponde un y, pero que no afirma que tal y debe ser distinto para cada x.

vi) $\exists x \forall y$: $p(x, y)$ es falsa por la misma razón dada en (iv).

Se generalizan ahora las leyes de DeMorgan para proposiciones con cuantificadores, estas son:

1. $\neg \forall x\, p(x) \equiv \exists x / \neg p(x)$
2. $\neg \exists x$: $p(x) \equiv \forall x\ [\neg p(x)]$
3. $\forall x\, p(x) \equiv \neg \exists x / \neg p(x)$
4. $\exists x / p(x) \equiv \neg \forall x\, [\neg p(x)]$

00 0766

La equivalencia (1) afirma que "no todos los elementos del universo cumplen $p(x)$" es decir que "existe al menos uno que no lo cumple". Afirmar que "no existe al menos un elemento del universo que cumple $p(x)$" es equivalente a decir que "todos los elementos del universo no cumplen $p(x)$". Decir que "todos los elementos del universo cumplen $p(x)$" es equivalente a afirmar que "no existe al menos uno que no cumpla $p(x)$".

Estas leyes pueden utilizarse repetidamente para negar cualquier proposición cuantificada. Por ejemplo:

a) $$\begin{aligned} \neg \forall x \exists y / p(x,y) &\equiv \exists x / \neg \exists y\colon p(x,y) \\ &\equiv \exists x \forall y [\neg p(x,y)] \end{aligned}$$

b) Negar: $\forall x \forall y \exists z\ [x < z < y]$

$$\begin{aligned} \neg \forall x \forall y \exists z\ [x < z < y] &\equiv \exists x \exists y \forall z \neg [x < z < y] \\ &\equiv \exists x \exists y \forall z\ [(x \geq z) \vee (z \geq y)] \end{aligned}$$

Una proposición "especial" que casi es una tautología es la siguiente: $\forall x\, p(x) \longrightarrow \exists\colon p(x)$.

Ejemplos

a) "Si todo cuadrado es rectángulo, entonces existe al menos un cuadrado que es rectángulo". El universo es el conjunto de todos los rectángulos.

b) "Si todo niño es travieso, entonces existe al menos un niño que es travieso". El universo es el conjunto de todos los niños.

c) "Si todos los elefantes que vuelan son blancos, entonces existe al menos un elefante que vuela y es blanco. El universo es el conjunto de todos los elefantes que vuelan ".

En el ejemplo c) la proposición es falsa, porque el antecedente es verdadero y el consecuente falso. Lo anterior ocurre porque el universo es el conjunto vacío. Si usted cree que en este caso $\forall x\, p(x)$ es falso, enuncie entonces un contraejemplo, es decir muestre un elefante que vuele y no sea blanco. Recuerde que la vía del contraejemplo es la única forma de demostrar la falsedad de $\forall x\, p(x)$.
De manera que **la proposición $\forall x\, p(x) \longrightarrow \exists x\colon p(x)$ es una tautología, para todo universo no vacío.**

Ejercicios 1.5

I. Considere las siguientes proposiciones:

$h(x)$: x es un ser humano
$m(x)$: x teme a la muerte
$i(x)$: x es un ser imaginario
$o(x)$: x es un mentiroso
$p(x)$: x es ignorado
$q(x)$: x es millonario
$f(x)$: x es feliz
$u(x)$: x es un unicornio

Escriba lógicamente:

a) Cualquier humano teme a la muerte.

Instituto de Investigación para el Mejoramiento de la Educación Costarricense (IIMEC)
Facultad de Educación

b) Los unicornios son seres imaginarios.

c) Algunos no son millonarios y son felices.

d) Los unicornios existen pero son ignorados.

e) Todo mentiroso es infeliz.

f) Alguien no es feliz.

g) Alguien no es mentiroso.

h) Nadie es pobre y feliz.

i) Los seres imaginarios no temen a la muerte.

II. Escriba las siguientes frases en notación lógica. Use cuantificadores, especifique los universos, utilice $\mathbb{R}$ si no se especifica ningún universo.

a) Si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$.

b) Para todo número x mayor que cero, existe uno natural n tal que $n > x$ y $x > \frac{1}{n}$.

c) Para toda m, n naturales, existe p natural tal que $m < p$ y $p < n$.

III. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. De a) a g) el universo es $\mathbb{R}$. De h) a k) el universo es $\mathbb{N}$.

a) $\forall x \exists y / xy = 1$

b) $\exists y \forall x \, [xy = 1]$

c) $\exists x \exists y / xy = 1$

d) $\forall x \forall y \, [(x+y)^2 = x^2 + y^2]$

e) $\forall x \exists y \, [(x+y)^2 = x^2 + y^2]$

f) $\exists y \forall x \, [(x+y)^2 = x^2 + y^2]$

g) $\exists x \exists y / 2x - y = 3 \ \wedge \ 5x + 3y = -1$

h) $\forall m \exists n / 2n = m$

i) $\forall m \exists n / m > n$

j) $\exists n \forall m \, [m > n]$

k) $\exists n \exists m / m = 2n$

IV. Proporcione un contraejemplo a cada una de las siguientes proposiciones

1. Toda ecuación que tenga exactamente dos soluciones distintas es una ecuación cuadrática.

2. $\forall m, n \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{N}$ tq $m < x < n$.

3. $\forall x \forall y \ [x - y = y - x]$; $x, y \in \mathbb{R}$.

4. $\forall x \exists y / xy = 1$; $x, y \in \mathbb{R}$.

5. $\forall n \in \mathbb{N} \ \ [n^3 < 3]$.

6. $\forall x \in \mathbb{R} \ \ [(x+1)^2 \geq x^2]$.

7. $\forall n \geq 2 \ \ [2^n - 1$ es primo$]$

V. Escriba la negación de cada una de los proposiciones siguientes:

a) $[\forall x \, (c(x) \wedge r(x))] \longrightarrow [\forall y (p(y) \longrightarrow q(y))]$.

b) $\forall x \, [a(x) \longrightarrow \forall y \ h(y)]$.

c) $\forall x \, \forall y \, [r(x,y) \longrightarrow r(y,x)]$.

d) $\forall x \, \forall y \, [r(x,y) \longrightarrow \neg r(y,x)]$.

e) $\forall x \, \forall y \, \forall z \{[r(x,y) \wedge r(y,z)] \longrightarrow r(x,z)\}$

f) $\exists x \{[(p(x) \wedge a(x)) \wedge \forall y (p(x) \wedge a(y))] \longrightarrow x = y\}$

g) $\forall x \, \forall y \, [f(x) = f(y) \longrightarrow x = y]$.

h) $\forall x \, \forall y \, [x < y \longrightarrow f(x) < f(y)]$

i) $\forall x \, [(r(x) \vee q(x)) \longrightarrow (e(x) \wedge d(x))]$

j) $\forall x \, \exists y \, [p(x) \wedge m(x)]$

k) $\forall x \, \forall y \, [n(x) \longrightarrow (m(y) \vee p(y))]$

Capítulo 2

Teoría de conjuntos

El concepto de conjunto es una noción primitiva, en palabras sencillas se dice que un conjunto es una colección de objetos y que tales objetos son los elementos del conjunto.

Generalmente se denota un conjunto con una letra mayúscula y sus elementos con letras minúsculas.

Para denotar que un elemento está en un conjunto se utiliza el símbolo $\in$, y el símbolo $\notin$ cuando así no lo sea.

$$\text{Si } A = \{a, b, c\}, \text{entonces } \quad a \in A, \quad b \in A \quad \text{y} \quad x \notin A.$$

Definición 2.0.1

i) Cardinalidad: Si A es un conjunto finito, se define la cardinalidad de A, que se denota $|A|$, como el número de elementos de A.

ii) Conjunto vacío: conjunto con cardinalidad cero, se denota $\emptyset$ o bien $\{\}$.

iii) Conjunto universo: conjunto de todos los elementos, se denota $\mathcal{U}$.

iv) Conjunto finito: conjunto con cardinalidad n, para algún n número natural.

v) Conjunto infinito: conjunto no finito.

Los conjuntos pueden expresarse de dos formas: por extensión o por comprensión.

Un conjunto está expresado **por extensión** cuando se especifican sus elementos, separados por comas y entre llaves. En el caso en que el conjunto contenga un número grande de elementos, deben especificarse suficientes de manera que quede claro quiénes son los elementos del conjunto.

Un conjunto está expresado **por comprensión** cuando se indica de manera simbólica la o las características que cumplen sus elementos.

Ejemplo Sean:

$A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$
$B = \{a, e, i, o, u\}$
$C = \{x \in \mathbb{N} / x \geq 15\}$
$M = \{x \in \mathbb{N} / x > 3 \wedge x \text{ es par}\}$
$N = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x + 2 = 0\}$
$D = \{x \in \mathbb{Q} / -5 \leq x \leq 1\}$

Los conjuntos A y B están expresados por extensión y los conjuntos C, D y M por comprensión y son infinitos. El conjunto N está expresado por comprensión y es vacío.

Ahora bien, no se trata de expresar un conjunto de ambas formas, sino de que éste quede bien definido, es decir que no existan dudas sobre quiénes son sus elementos.

Definición 2.0.2 *Dos conjuntos A y B son iguales (se denota $A = B$), si poseen exactamente los mismos elementos, es decir* $\forall x\,[x \in A \iff x \in B]$.

Ejemplo

i) Sean $A = \{x \in \mathbb{R} / 3x^2 - 2x - 5 = 0\}$ y $B = \left\{-1, \frac{5}{3}\right\}$

$$A = B$$

ii) $M = \{x, y, a, t, x\}$, $N = \{t, x, y, a\}$

$$M = N$$

iii) $A = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ impar} \vee 2n + 10 < 20\}$, $B = \{n \in \mathbb{R} / x^2 - 4x + 3 = 0\}$

$$A = B$$

iv) $T = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 3\}$, $S = \{0, 1, 2, 3\}$.

$$T \neq S.$$

Definición 2.0.3 *Un conjunto A es subconjunto de un conjunto B si todos los elementos de A son también elementos de B, es decir:* $\forall x \in A \Longrightarrow x \in B$.

La proposición "A es subconjunto de B" se denota $A \subseteq B$. Se dice también "A está contenido en B".

Note que: $\underbrace{A \subseteq B}_{(1)} \iff \underbrace{\forall x, x \in A \Longrightarrow x \in B}_{(2)}$, *donde (1) está en lenguaje de conjuntos y (2) en notación lógica.*

Teorema 2.0.1 *Sean* A *y* B *dos conjuntos*

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Demostración

$A = B$

$\iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$

$\iff (\forall x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \Longrightarrow x \in A)$

$\iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$

Teorema 2.0.2

i) $A \subseteq A;\ \forall A$

ii) $\emptyset \subseteq A;\ \forall A.$

Definición 2.0.4 *Un conjunto* A *es subconjunto propio de un conjunto* B $(A \subset B)$ *sii* $A \subseteq B \wedge A \neq B$.

Ejemplo

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, porque $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \wedge \mathbb{Z} \neq \subset \mathbb{N}$.

2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, porque $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \wedge \mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$.

3. Sea $A = \{e, f, x\} \wedge B = \{f, g, x\}$, $A \not\subseteq B$ porque $e \in A \wedge e \notin B$, basta hallar un elemento que esté en A que no esté en B para así asegurar que $A \not\subseteq B$, en otras palabras, la no inclusión puede probarse mediante un contraejemplo.

Definición 2.0.5 *Sean* A *y* B *dos conjuntos* $A \not\subseteq B \iff \exists x / x \in A \wedge x \notin B.$

Definición 2.0.6 *Sea* A *un conjunto, se llama conjunto potencia de* A *al conjunto de todos los subconjuntos (propios o no) de* A, *se denota* $\mathcal{P}(A)$.

Ejemplo

1. *Si* $A = \{1, 3, 5\}$, *entonces los subconjuntos de* A *son* $\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}$, *es decir* $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$.
   Note que $\mathcal{P}(A)$ *es un conjunto de conjuntos y que se pueden establecer relaciones como las siguientes:*

   $1 \in A, \quad \{1\} \subseteq A, \quad \{1\} \in \mathcal{P}(A), \quad A \subseteq A, \quad A \in \mathcal{P}(A)$

   $\{3, 5\} \subseteq A, \quad \{3, 5\} \in \mathcal{P}(A), \quad \emptyset \subseteq A, \quad \emptyset \in \mathcal{P}(A), \quad \emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$

   En general: $M \subseteq A \iff M \in \mathcal{P}(A)$.

Teorema 2.0.3 *Si* $|A| = n$, *entonces* $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

En capítulos posteriores será posible probar este teorema, por ahora usted puede verificarlo con algunos ejemplos.

2.1 Operaciones con conjuntos

Dados dos conjuntos hay maneras de formar nuevos conjuntos a partir de estos.

- **Unión**

Definición 2.1.1 *Dados dos conjuntos M y N, la unión de M y N consiste en formar un nuevo conjunto que contiene todos los elementos de M o todos los elementos de N. Simbólicamente se expresa*

$$M \cup N = \{x/x \in M \vee x \in N\}$$

Es decir x es un elemento que puede estar en M o puede estar en N o en ambos conjuntos.

La proposición $x \in M \cup N$ se traduce entonces en la proposición $x \in M \vee x \in N$ es decir $x \in M \cup N \iff x \in M \vee x \in N$.

Ejemplo

1. Sean $A = \{a, e, o\}$, $B = \{b, i, e, \ell\}$

$$A \cup B = \{a, e, o, b, i, \ell\}$$

2. Sean $X = \{x \in \mathbb{Z}/x \geq -2\}$, $Y = \{-4, -3, -2, 0\}$

$$X \cup Y = \{x \in \mathbb{Z}/x \geq -4\}$$

3. $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$

Utilizando las reglas lógicas que ya se conocen para la conectiva $\vee$, se deducen algunas propiedades que cumple esta operación y que deben demostrarse en los ejercicios del capítulo.

Propiedades:

1. Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$.
2. Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
3. Idempotencia: $A \cup A = A$.
4. Identidad: $A \cup \emptyset = A$.
5. Identidad: $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Así también de la implicación lógica "$p \Longrightarrow (p \vee q)$" puede derivarse el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1 *Si $x \in A$, entonces $x \in (A \cup B)$.*

¿Qué teorema puede enunciarse de la regla de inferencia, "silogismo disyuntivo"?

- **Intersección**

Definición 2.1.2 *Dados dos conjuntos A y B, la intersección de A y B consiste en formar un nuevo conjunto con los elementos que pertenecen tanto a A como a B. Simbólicamente se expresa*

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}.$$

Es decir $x \in (A \cap B) \iff x \in A \wedge x \in B$.

Ejemplo

1. $A = \{m, n, r, s\}, \quad B = \{o, p, r\}$

$$A \cap B = \{r\}$$

2. $M = \{x \in \mathbb{N} / x > 5\}, \quad N = \{1, 3, 5\}$

$$M \cap N = \emptyset$$

3. $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$

Propiedades

1. Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$
2. Asociativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Idempotencia: $A \cap A = A$
4. Identidad: $A \cap \emptyset = \emptyset$
5. Identidad: $A \cap \mathcal{U} = A$

Definidas la unión y la intersección son posibles las leyes distributivas:

6. Distibutividad: $A \cup (B \cap C) \Longleftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. Distributividad: $A \cap (B \cup C) \Longleftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Utilizando la regla lógica "simplificación", es posible enunciar $x \in (A \cap B) \Longleftrightarrow$ (por definición) $x \in A \wedge x \in B \Longrightarrow$ (por regla 17) $x \in A$. Es decir $A \cap B \subseteq A$

Definición 2.1.3 *Dos conjuntos A y B tales que $A \cap B = \emptyset$ se llaman disjuntos.*

- **Diferencia**

Definición 2.1.4 *Dados dos conjuntos A y B, la diferencia de A y B, que se denota $A - B$, es un nuevo conjunto que contiene los elementos que están en A y no están en B. Simbólicamente se expresa:*

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ejemplo

1. Sean $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ y $B = \mathbb{N}$

$$A - B = \{-3, -2, -1\}.$$

Note que $(A - B) \subseteq A$.

2. Sean $M = \{*, \Delta, +\}$ y $N = \{\square, \bigcirc, \Diamond, \#\}$

$$M - N = \{*, \Delta, +\} = M.$$

- **Complemento**

Definición 2.1.5 *Para determinar el complemento de un conjunto debe conocerse el universo en el que se está trabajando. El complemento de un conjunto X, que se denota $\overline{X}$, es el conjunto de los elementos que le faltan a X para ser igual a su universo, es decir: $\overline{X} = \mathcal{U} - X$.*

Ejemplo

1. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 10\}$ y $\mathcal{U} = \mathbb{N}$

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{N} / x \geq 11\}$$

2. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{I}$ (siendo $\mathbb{R}$ el universo).

   Note que $(x \in A \iff x \notin \overline{A}) \wedge (x \in \overline{A} \iff x \notin A)$

Propiedades

1. $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$
2. $A \cap \overline{A} = \emptyset$
3. Leyes de DeMorgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2.2 Partición de un conjunto

Definición 2.2.1 *Una partición de un conjunto A es un conjunto $\mathcal{L}$ cuyos elementos son subconjuntos de A, tales que la unión de ellos es A y la intersección dos a dos es vacía, simbólicamente: $\mathcal{L} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es una partición de A sii:*

i) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$

ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$; $\forall i, j \quad i \neq j$.

Ejemplo

1. $\mathcal{L} = \{\{m, n\}, \{r\}, \{s, t\}\}$ es una partición de $A = \{r, s, m, n, t\}$ ya que

   i) $\{m, n\} \cup \{r\} \cup \{s, t\} = A$

   ii) $\{m, n\} \cap \{r\} = \emptyset$

   $\{m, n\} \cap \{s, t\} = \emptyset$

   $\{r\} \cap \{s, t\} = \emptyset$

   ¿Es esta la única partición de A?

Definición 2.2.2 *Una familia de conjuntos es un conjunto de conjuntos. Cada conjunto es un miembro o elemento de la familia y cada uno cumple, en particular, la(s) característica(s) que definen en general a la familia.*

Ejemplo Si $A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$; $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{L} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ es una familia de conjuntos, donde por ejemplo

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\},$$
$$A_2 = \{2, 3, 4, \ldots\},$$
$$A_{15} = \{15, 16, 17, 18, \ldots\}.$$

Con los elementos de una familia se pueden efectuar también operaciones, por ejemplo:

(a) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

(b) $A_5 \cap A_7 = \{7, 8, 9, \ldots\}$

(c) $A_{10} - A_9 = \emptyset$.

Cuando la operación involucra un número infinito o finito muy grande de conjuntos, es posible escribir la expresión de una forma abreviada, esto es:

- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ (i se llama subíndice y varía desde 1 hasta n).
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$
- $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$
- $(A \cup A_1) \cap (A \cup A_2) \cap (A \cup A_3) \cap \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup A_i)$

De igual forma pueden efectuarse operaciones entre elementos de familias diferentes. Por ejemplo

Sea A_n el definido antes y $B_n = \{1, 2, \ldots, n\}$; $n \in \mathbb{N}$.

i) $A_1 \cup B_1 = \{1, 2, 3, \ldots\} = A_1$

ii) $A_3 \cap B_5 = \{3, 4, 5\}$

2.3 Producto cartesiano

Definición 2.3.1 *Dados dos conjuntos A y B, el producto cartesiano de A y B, que se denota $A \times B$, es un nuevo conjunto cuyos elementos son pares ordenados (a, b), siendo a un elemento de A y b un elemento de B. Así*

$$A \times B := \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Si $a \neq b$, entonces $(a, b) \neq (b, a)$, de ahí que $\exists A, B$ conjuntos tales que $A \times B \neq B \times A$, por lo que la operación producto cartesiano no es conmutativa.

Ejemplo Sean $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{m, n\}$, entonces

$$A \times B = \{(1, m), (1, n), (3, m), (3, n), (5, m), (5, n)\}$$

Ejercicios 2.1

1. Sean $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $M = \{x / x \geq 7\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 10\}$, $T = \{6, 7, 8, 9\}$,

Instituto de Investigación
para el Mejoramiento de la
Educación Costarricense (IIMEC)
Facultad de Educación

a) $\overline{M} =$
b) $M \cap N =$
c) $M \cup \overline{N} =$
d) $N - M =$
e) $(M \cup N) - T$
f) $\overline{T} \cap N =$
g) $\overline{N} - (M - T) =$
h) $T \times \overline{M} =$
i) $\overline{M} \times T \times (N - T)$
j) $\overline{T \times T}$

2. En cada caso, determine dos conjuntos M y N tales que:

a) $M \cup N = M$ b) $M \cap N = M$ c) $M - N = M$

3. Para cada caso del ejercicio 2, indique que relación deben cumplir M y N para satisfacer la igualdad.

4. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

a) $\{2\} \in A$
b) $\{\{2\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$
c) $\{3, 5\} \in \mathcal{P}(A)$
d) $\{\{1, 2, 3\}\} \subseteq A$
e) $A \in \mathcal{P}(A)$
f) $\{A\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

5. Ilustre con un contraejemplo la falsedad de las siguientes proposiciones.

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\forall A, B$ conjuntos.

(b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$; $\forall A, B$ conjuntos.

(c) $M - (N \cup A) = (M - N) \cup (M - A)$; $\forall M, N, A$ conjuntos.

(d) $\mathcal{P}(X \cup Y) \subseteq \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$; $\forall X, Y$ conjuntos.

6. Muestre que $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$; $\forall A$

7. Muestre que:

(a) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (Leyes conmutativas).

(b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Leyes asociativas).

(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Leyes distributivas).

8. Muestre que:

(a) $B - A = B - (A \cap B)$

(b) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

(c) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(d) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

(e) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

(f) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$

9. Muestre que: $A \subseteq A \cup B$ y que $A \cap B \subseteq A$

10. Muestre que: $A \cup B \subseteq A \cup C \ \wedge \ A \cap B \subseteq A \cap C \implies B \subseteq C$

11. Muestre que: $A \subseteq B \iff A \cup B = B$

12. Muestre que: $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

13. Muestre que: $A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq D \implies A \cap B \subseteq C \cap D$

14. Muestre que: $A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq D \implies A \cup B \subseteq C \cup D$

15. $A \subseteq B \ \wedge \ A \subseteq C \iff A \subseteq B \cap C$

16. $A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq C \iff A \cup B \subseteq C$

17. $A \times \emptyset = \emptyset$

18. Sean A, B, C, X conjuntos tales que $A \subseteq X$; $B \subseteq X$, $C \subseteq X$. Muestre que:

    (a) $\overline{\overline{A}} = A$

    (b) $\overline{\emptyset} = X$

    (c) $A \cap \overline{A} = \emptyset$

    (d) $A \cup \overline{A} = X$

    (e) $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq \overline{B}$ y $B \subseteq \overline{A}$

    (f) $A \subseteq B \iff \overline{B} \subseteq \overline{A}$

    (g) $A = B \iff \overline{A} = \overline{B}$

19. Pruebe las siguientes igualdades:

    (a) $A \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$

    (b) $A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$

    (c) $A \cup (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cup A_i)$

    (d) $A \cap (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (A \cap A_i)$

    (e) $\overline{\cap A_i} = \cup \overline{A_i}$

    (f) $\overline{\cup A_i} = \cap \overline{A_i}$

20. Si $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ Muestre que:

    (a) $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$

    (b) $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y)$

21. Sean $P_n = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n\}$ y $S_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Determinar:

a) $P_2 \times S_3 =$
b) $(P_2 \times S_3) - (P_1 \times S_1) =$
c) $\{2\} \times \emptyset =$
d) $\{2\} \times S_4 =$
e) Una particion de P_5
f) $\mathbb{N} - S_8 =$
g) $\mathbb{N} - S_n =$
h) $\mathbb{N} - P_6 =$
i) $\mathbb{N} - P_3 =$
j) $\mathbb{N} - P_n =$
k) $P_n \cap S_n =$
l) $P_n - S_n =$
m) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{N} - S_n) =$
n) $S_n \times P_n =$

22. Sean $A_0 = \{0\}$ y $A_n = \{k \in \mathbb{Z} : -n \leq k \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Hallar:

a) $A_6 - A_3 =$
b) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 =$
c) $A_5 \cup A_8 =$
d) $\bigcup_{i=1}^{7} A_i =$
e) $\bigcap_{n=1}^{4} A_n =$
f) $\overline{A_6} =$
g) $A_2 \times A_0 =$
h) $A_4 - A_3 =$
i) $A_6 - A_5 =$
j) $A_n - A_{n-1} =$
k) $\mathbb{Z} - A_n =$
l) $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n =$
m) $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n =$
n) $\bigcap_{n=0}^{\infty} (\mathbb{Z} - A_n) =$

Capítulo 3

Inducción Matemática

3.1 Sucesión

Definición 3.1.1 *Una sucesión es una correspondencia entre* $\mathbb{N}$ *y* $\mathbb{R}$ *de manera tal, que* $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists!\ a_n \in \mathbb{R}$ *que le corresponde.*

Suele utilizarse notación de subíndices para representar los términos de una sucesión, en este caso $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ son los términos de una sucesión. El término a_n se llama n-ésimo término o término general de la sucesión y generalmente indica la forma o criterio que permite obtener diferentes términos de la sucesión.

Ejercicio

1. Dado el término general, obtenga los términos que se indican.

   (a) $a_n = \dfrac{n+1}{3}$; $a_2,\ a_3, a_{14},\ a_{19}$.

   (b) $a_k = 4k - 2$; $a_2, a_5,\ a_{12}$.

   (c) $a_n = n!$; ($n!$ se lee el factorial de n y está dado por $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$) a_2, a_3, a_5, a_6.

2. En cada caso se indican los primeros términos de una sucesión, induzca el n-ésimo término. Es decir, escriba una fórmula que permita obtener cualquier término de la sucesión.

1)	2)	3)
$a_1 = 2$	$a_1 = 1$	$a_1 = 5$
$a_2 = 4$	$a_2 = 3$	$a_2 = 10$
$a_3 = 6$	$a_3 = 5$	$a_3 = 15$
$a_4 = 8$	$a_4 = 7$	$a_4 = 20$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_n = ?$	$a_n = ?$	$a_n = ?$

4) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, $a_4 = 10$, $\vdots$, $a_n = ?$

5) $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$, $a_4 = 12$, $\vdots$, $a_n = ?$

A partir de los términos de una sucesión es posible obtener fórmulas que expresan de manera general el resultado de operar con tales términos. Así por ejemplo, considérese la sucesión $S_n = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots\}$, se desea obtener una fórmula que exprese el resultado de sumar los n-primeros impares, esto es:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = ?,$$

tal resultado es posible inducirlo a partir de casos particulares, observe:

$1 = 1$
$1 + 3 = 4$
$1 + 3 + 5 = 9$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$

Comparando el número de sumandos con el total, es posible asegurar que
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 2n - 1 = n^2$ (la suma de los n-primeros impares es n^2).

Debe notarse que la fórmula se derivó a partir de 4 o 5 casos particulares, ello no significa que se pueda garantizar la veracidad de la igualdad para un n cualquiera. ¿Cómo estar seguros que funciona aún para la suma de los 100 primeros impares, por ejemplo?

Se requiere entonces, un nuevo método de demostración, que entre otros casos permita demostrar la veracidad de las fórmulas como ésta para un $n \in \mathbb{N}$. Este método se llama inducción matemática, trata de establecer la veracidad de una lista infinita de proposiciones. El método se aplica cuando:

a) se conoce la respuesta para un caso.

b) se sabe como determinar un resultado a partir del resultado anterior y

c) se tiene una expectativa de respuesta general.

Antes de presentar el principio de inducción matemática, induzca otras fórmulas que luego deberán ser demostradas.

Ejercicio

En cada caso se presenta una lista de resultados, a partir de ellos induzca un resultado general.

1. $2 = 2$
   $2 + 4 = 6$
   $2 + 4 + 6 = 12$
   $2 + 4 + 6 + 8 = 20$
   $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$

$$\vdots$$

$$2+4+6+\cdots+2n=?$$

2. $1=1$
   $1+2=3$
   $1+2+3=6$
   $1+2+3+4=10$
   $1+2+3+4+5=15$
   $\vdots$
   $1+2+3+4+\cdots+n=?$

3. $1<2^1$
   $2<2^2$
   $3<2^3$
   $4<2^4$
   $\vdots$
   ?

4. $7-1=6\cdot1$
   $7^2-1=6\cdot8$
   $7^3-1=6\cdot57$
   $7^4-1=6\cdot400$
   $\vdots$
   ?

Por supuesto, que si el resultado o fórmula establecido está incorrecto, no es posible demostrarlo ni con el principio de inducción ni con ningún otro método.

Primer principio de inducción

Suponga que se tiene un proposición $S(n)$ con $n\in\mathbb{N}$.

Si (i) Paso básico: S(1) es verdadera y

(ii) Paso inductivo: S(k) es verdadera implica que $S(k+1)$ es verdadera; $k\in\mathbb{N}$,

entonces $S(n)$ es verdadera $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Note que este principio es un condicional cuyo antecedente es una conjunción (paso básico y paso inductivo) y debe probarse su veracidad para así asegurar que las $S(n)$ son verdaderas $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Además, el paso inductivo es un condicional, quiere decir que para demostrar su veracidad se asume que $S(k)$ es verdadero, esta se llama **hipótesis de inducción** y es un resultado que debe usarse para probar la veracidad de $S(k+1)$.

Ejemplos

1. Demuestre que $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2};\forall\, n\in\mathbb{N}$ (suma de los n-primeros números naturales).

Demostración

i) Paso básico: Suponga n=1

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

ii) Paso inductivo

Se asume que la fórmula se cumple para $n = k$, en este caso que la suma de los k primeros números naturales es $\frac{k(k+1)}{2}$. Es decir:

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2} \text{ (hipótesis de inducción)}$$

Debe probarse que la fórmula se cumple para $n = k+1$.

h.q.p: $1+2+3+\cdots+k+k+1 = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$

$\underbrace{1+2+3+\cdots+k}_{\frac{k(k+1)}{2}}+k+1 =$ por hipótesis

$$\frac{k(k+1)}{2}+k+1 =$$

$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} =$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$\therefore\ 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2};\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

2. Demuestre que $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdot+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Demostración

i) Paso básico. Suponga $n = 1$

$$1\cdot2 = \frac{1\cdot2\cdot3}{3}$$

ii) Paso inductivo.

Hipótesis de inducción: Suponga $n = k$

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

h.q.p: $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+(k+1)(k+1+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)(k+1+2)}{3}$.

Se parte de un lado de la igualdad: $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+(k+1)(k+1+1) =$

$\underbrace{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)}_{\frac{k(k+1)(k+2)}{3}}+(k+1)(k+2) =$ por hipótesis

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2) =$$

$$\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3} =$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$\therefore\ 1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdot+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\quad \forall n \in \mathbb{N}.$

3. Demuestre $11^n - 6$ es divisible por 5; $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración

i) Paso básico. Suponga $n = 1$. Como 5 es divisible por 5, entonces $11^1 - 6$ es divisible por 5.

ii) Paso inductivo. Suponga que el número $11^k - 6$ es divisible por 5, es decir $\exists h_1 \in \mathbb{Z} / 11^k - 6 = 5h_1$

h.q.p: el número $11^{k+1} - 6$ es divisible por 5, es decir $\exists h_2 \in \mathbb{Z} / 11^{k+1} - 6 = 5h_2$

$$\begin{aligned} 11^{k+1} - 6 &= 11 \cdot 11^k - 6 \\ &= 10 \cdot 11^k + 11^k - 6 \quad \text{por hipótesis} \\ &= 10 \cdot 11^k + 5h_1 \\ &= 5(2 \cdot 11^k + h_1) \quad \text{como } k, h \in \mathbb{Z}, \text{ entonces } (2 \cdot 11^k + h_1) \in \mathbb{Z} \\ &= 5h^2 \quad \text{Sea } 2 \cdot 11^k + h_1 = h_2 \end{aligned}$$

$\therefore$ $11^n - 6$ es divisible por 5; $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se finaliza esta sección introduciendo una notación que resulta muy cómoda en algunos casos que se refieren a sucesiones: notación de sumatoria y productoria.

La notación de sumatoria se utiliza para abreviar sumas con un número grande o infinito de términos.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Ejemplos

1. $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}$.

2. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = \sum_{k=1}^{n} 2k$.

3. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \sum_{j=1}^{n} j$

La notación de productoria se utiliza para abreviar multiplicaciones con un número muy grande o infinito de factores.

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

Ejemplos

1. $\prod_{k=2}^{5} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

2. $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1) = \prod_{k=1}^{m} (2k-1)$

Ejercicios

1. Exprese en notación de sumatoria.

   (a) $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) =$

   (b) $5 + 9 + 13 + \cdots + (4n + 1) =$

(c) $7 + 13 + 19 + \cdots + (6n + 1) =$

2. Calcule las siguientes sumas o multiplicaciones

(a) $\sum_{k=2}^{6} (3^k - 1) =$

(b) $\sum_{n=1}^{4} \left[1 - (\frac{1}{2})^n\right] =$

(c) $\prod_{k=1}^{5} (k + 1)$

(d) $\prod_{n=3}^{7} 2^{n-2}$

3. Demuestre

(a) $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) $4 + 10 + 16 + \cdots + (6n - 2) = n(3n + 1)$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) $a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$; $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 1,\ a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

(e) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

(f) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$.

(g) $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \dfrac{3}{2}(3^n - 1)$.

(h) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

(i) $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n + 1)! - 1$.

(j) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

(k) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n+1} n^2 = \dfrac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$.

(l) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

(m) $(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + \cdots + (4n - 1) = 3n^2$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

(n) $\dfrac{(2m)!}{m!} = 2^m \cdot \prod_{j=1}^{m} (2j-1)$.

(o) $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$

(p) $11^n - 4^n$ es divisible por 7; $\forall n \in \mathbb{N}$.

(q) $n^3 - 4n + 6$ es divisible por 3; $\forall n \in \mathbb{N}$.

(r) 3 es factor de $n^3 - n + 3$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

(s) 2 es factor de $n^2 + n$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

(t) $5^n - 1$ es divisible por 4; $\forall n \in \mathbb{N}$.

(u) $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$ es divisible por 9; $\forall n \in \mathbb{N}$.

(v) $n < 2^n$.

(w) $1 - 2n \leq 3^n$.

(x) $n^2 > n + 1$; $\forall n \geq 2$.

(y) $n! > n^2$; $\forall n \geq 4$.

(z) $2n + 1 \leq 2^n$; $\forall n \geq 3$.

4. Suponga que $2 + 4 + \cdots + 2n = (n+1)(n-1)$.

Pruebe que el Paso Inductivo se cumple pero el Paso Básico no. Por lo tanto tal igualdad es incorrecta.

3.2 Sucesiones recursivas.

Al inicio de este capítulo se presentaron únicamente sucesiones de términos independientes, es decir, donde la determinación de un término no depende de alguno de sus anteriores. Otro tipo de sucesiones son aquellas en las que la determinación de un término depende de uno o más anteriores, tales sucesiones se llaman definidas recursivamente; en ellas además el primer o primeros términos están dados.

Por ejemplo, sea $a_1 = 2 \qquad a_n = 2a_{n-1} + 1$.

Observe que a_n depende del término anterior a_{n-1}; así para determinar a_5, por ejemplo, se requiere de a_4 y este a su vez de a_3 y así sucesivamente:

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1+1 = 2\cdot 2+1 = 5 \\ a_3 &= 2a_2+1 = 2\cdot 5+1 = 11 \\ a_4 &= 2a_3+1 = 2\cdot 11+1 = 23 \\ a_5 &= 2a_4+1 = 2\cdot 23+1 = 47 \end{aligned}$$

La demostración de algunos resultados que involucran sucesiones definidas por recursividad, no es posible mediante el primer principio de inducción, dado que en este principio la veracidad de $S(k+1)$ depende de la veracidad del resultado inmediato anterior, $S(k)$; mientras que en algunas sucesiones recursivas el resultado $S(k+1)$ puede depender de otros términos anteriores que no son necesariamente el inmediato anterior.

Por ejemplo, sea $a_1 = 1 \;\; a_2 = 2$ y $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$. Demuestre que $a_n = n;\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Aunque no es necesario, es útil previo a la demostración calcular algunos términos de la sucesión para observar su comportamiento, así:

$$\begin{aligned} a_3 &= 2a_2-1 = 2\cdot 2-1 = 3 \\ a_4 &= 2a_3-1 = 2\cdot 3-1 = 4 \\ a_5 &= 2a_4-1 = 2\cdot 4-1 = 5 \\ a_6 &= 2a_5-1 = 2\cdot 5-1 = 6 \end{aligned}$$

Los cuatro casos anteriores son tan sólo una verificación de la fórmula para $n = 3,4,5,6$; debe probarse que efectivamente se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$, lo cual requiere del "Segundo principio de inducción", que se enuncia a continuación.

Segundo principio de inducción.

Suponga que se tiene una proposición $S(n)$ con $n \in \mathbb{N}$; donde $S(n)$ depende de uno o más términos anteriores, no necesariamente los inmediatos.

Si

(i) Paso básico: $S(n)$ es verdadera y

(ii) Paso inductico: $S(2), S(3), \ldots, S(k-2), S(k-1) \wedge S(k)$ son verdaderas implica que $S(k+1)$ es verdadera, $\therefore$ entonces $S(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Continuando con el ejemplo anterior, es posible ahora realizar la demostración requerida. **Demostración**

1. Paso básico $n = 1 \Longrightarrow a_1 = 1$

2. Paso inductivo
   se asume que se cumple la fórmula $\forall n \leq k$, es decir
   $a_2 = 2, \;\; a_3 = 3, \;\; \ldots, \;\; a_{k-2} = k-2, \;\; a_{k-1} = k-1, \;\; a_k = k$
   Debe probarse que $\;\; a_{k+1} = k+1$

$a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} = 2k - (k-1) = 2k - k + 1 = k + 1$
$\therefore\ a_n = n;\ \forall n \in \mathbb{N}.$

Ejercicios.

1. Sea a_1, a_2 y $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2};\ \ \forall n \geq 2.$
   (a) Calcule los primeros términos de la sucesión.
   (b) Induzca una fórmula general para a_n(no recursiva).
   (c) Demuestre la fórmula obtenida en b).
2. Sea $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$. Repita $a), b), c)$ del ejercicio 1.
3. Sea $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ y $a_n = a_{n-2} + a_{n-3};\ \ \forall n \geq 2$. Demuestre que $a_n \leq (\frac{4}{3})^n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
4. Sea $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3};\ \ \forall n \geq 3.$
   (a) Calcule los primeros términos de la sucesión.
   (b) Demuestre que todos los a_n son impares.
   (c) Demuestre que $a_n \leq 2^{n-1};\ \forall n \geq 1.$
5. Se define $a_0 = a_1 = 1$ y $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$: $\ \forall n \geq 2.$
   (a) Calcule a_2, a_3, a_4, a_5.
   (b) Demuestre que $a_n > 3^{n-1};\ \forall n \geq 2.$
   (c) Demuestre que $a_n < 2 \cdot 3^{n-1};\ \forall n \geq 2.$
6. Se define $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-3};\ \ \forall n \geq 3.$
   (a) Calcule a_1, a_2, a_6.
   (b) Demuestre que $a_n \geq 2a_{n-2};\ \forall n \geq 3.$
   (c) Demuestre que $a_n \geq (\sqrt{2})^{n-1};\ \ \forall n \geq 2.$

Capítulo 4

Divisivilidad

Ejercicio

Para cada una de las siguientes parejas de números enteros, determine dos enteros q y r tal que $n = qb + r$.

a) $n = 47$ y $b = 5$
b) $n = 27$ y $b = 9$
c) $n = 273$ y $b = 38$
d) $n = 72$ y $b = 11$

Note que la expresión de n en la forma $qb + r$ no es única, sin embargo si se le impone la siguiente condición $0 \leq r > b$, usted puede verificar que dados dos números n y b siempre es posible hallar otros dos enteros q y r tal que $n = bq + r$; $0 \leq r > b$ y que además tal expresión es única.

El siguiente teorema presenta este resultado y su demostración.

Teorema 4.0.1 *Algoritmo de la división.*

Si $n \in \mathbb{Z}$ *y* $b \geq 2$ *existe un único par de números enteros* q *y* r *tales que* $n = q \cdot b + r$ *y* $0 \leq r < b$.

Demostración

1er Caso $n \in \mathbb{N}$.

Existencia de q *y* r.

Si $n = 0$ *se tiene* $n = 0 \cdot b + 0$. *De aquí que* q *y* r *existen y* $q = 0 = b$.

Si $n = 1$ *se tiene* $n = 0 \cdot b + 1$. *De aquí que* q *y* r *existen y* $q = 0$ *y* $b = 1$.

Se asume verdadero para k *es decir existen* q, $r \in \mathbb{Z}$ *tales que* $k = qb + r$, *debe probarse ahora que* $k + 1 = q_1 \cdot b + r_1$ *con* $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ *y* $0 \leq r_1 < b$.

$k + 1 = q \cdot b + r + 1$ *como* $r < b$ *se tiene* $r + 1 < b \vee r + 1 = b$.

Si $r + 1 = b$, *entonces* $k + 1 = q \cdot b + r + 1 = q \cdot b + b = (q + 1)b$, *obteniendose* $k + 1 = (q + 1)b + 0$ *con* $q_1 = q + 1$ *y* $r_1 = 0$. *Si* $r + 1 < b$, *entonces* $n + 1 = q \cdot b + (r + 1)$, *siendo* $q_1 = q \wedge r_= r + 1 < b$.

$\therefore n = qb + r \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Se probará ahora que q *y* r *son únicos*

Supongase que existe otro par q_1, r_1 *de números enteros tales que* $n = q_1 \cdot b + r_1$, $0 \leq r_1 < b$.

Restando las siguientes igualdades

$$n = q_1 b + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < b$$

$$n = q \cdot b + r \qquad 0 \leq r < b$$

Se obtiene: $0 = q_1 b - qb + r_1 - r \iff (q - q_1)b = r_1 - r \ \wedge \ -b < r_1 - r < b$, ***juntando estos dos resultados:***

$$-b < (q - q_1)b < b \qquad (*)$$

- $q - q_1 > 0 \Longrightarrow q - q_1 \geq 1 \Longrightarrow (q - q_1)b \geq b$ *lo que contradice (*).*
- $q - q_1 < 0 \Longrightarrow q - q_1 \leq 1 \Longrightarrow (q - q_1)b \leq -b$ *lo que contradice (*).*

$\therefore \ q = q_1 \ \ y \ \ r = r_1$.

2^0 Caso $n < 0$.

Si $n < 0$ *entonces* $-n \in \mathbb{N}$ *y por el* 1^0 *Caso* $\exists$ *únicos* q *y* r *tales que*

$$-n = q \cdot b + r, \qquad 0 \leq r < b$$

$$n = -q \cdot b - r, \qquad -b < -r \leq 0$$

con el objetivo de tener el resto siempre positivo se suma y se resta b*:*

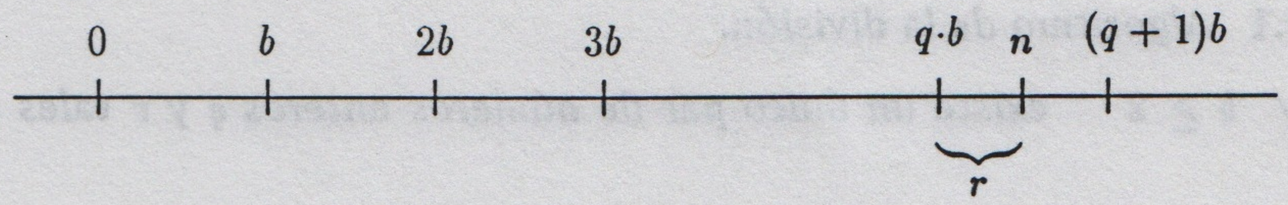
$$n = -q \cdot b - b + b - r, \qquad 0 < b - r \leq b$$

$$n = (-q - 1)b + (b - r)$$

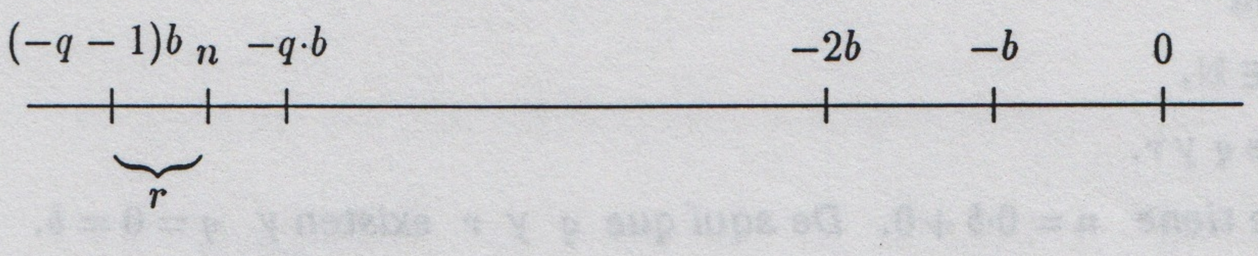
observe que $0 \leq r < b \Longrightarrow 0 \geq -r > -b \Longrightarrow b \geq b - r > 0$ *y que* $b - r = b \iff r = 0$.

En un dibujo este resultado se ve así:

Si $n > 0$



Si $n < 0$



Ejemplo 1

a) Si $b = 5$.

$$\begin{aligned} 142 &= 28 \cdot 5 + 2 && q = 28, \quad r = 2 \\ -142 &= -29 \cdot 5 + 3 && q = -29, \quad r = 3 \\ 79 &= 15 \cdot 5 + 4 && q = 15, \quad r = 4 \\ -79 &= -16 \cdot 5 + 1 && q = -16, \quad r = 1 \end{aligned}$$

b) Si $b = 11$.

$$\begin{aligned} 150 &= 13 \cdot 11 + 7 && q = 13, \quad r = 7 \\ -150 &= -14 \cdot 11 + 4 && q = -14, \quad r = 4 \end{aligned}$$

Nota: Aunque no se incluyó en el teorema b puede ser negativo.

Ejemplo 2

Si $b = -9$

$$105 = -11\cdot(-9) + 6$$
$$-105 = 12\cdot(-9) + 3$$

Definición 4.0.1 *Si* $n = q\cdot b + r$ *con* $0 \leq r < b$, r *es el resto o residuo de* $n \div b$ *y* q *es el cociente o parte entera de* $n \div b$.

Cuando $r = 0$ *se dice que* b *divide a* n *o que* n *es múltiplo de* b *y se representa* b/n. *La negación de esta proposición se representa* $b \not| n$.

Definición 4.0.2 *Sean* b *y* $n \in \mathbb{Z}$, b/n *sii* $\exists k \in \mathbb{Z}/n = kb$.

Ejemplo 3

a) $12/60$ porque $60 = 5\cdot 12$ y $5 \in \mathbb{Z}$.

b) $7/273$ ya que $273 = 39\cdot 7$ y $39 \in \mathbb{Z}$.

c) $n/0$ ya que $0 = 0\cdot n$, esto indica que 0 es múltiplo de cualquier número entero.

d) $1/n$; 1 es divisor de todo número entero.

Teorema 4.0.2 *Sean* $n, m \in \mathbb{Z}$.

Si d/n *y* d/m *entonces* $d/(c_1 n + c_2 m)$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$.

Demostración

$$d/n \Longrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z}: n = k_1 d \Longrightarrow c_1 n = c_1 k_1 d. \tag{1}$$

$$d/m \Longrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z}: m = k_2 d \Longrightarrow c_2 m = c_2 k_2 d. \tag{2}$$

sumando (1) y (2) se tiene

$$c_1 n + c_2 m = c_1 k_1 d + c_2 k_2 d = (c_1 k_1 + c_2 k_2) d$$

como c_1, k_1, c_2, k_2 son enteros entonces $k = c_1 k_1 + c_2 k_2$ es un número entero.

$\therefore \exists\, k \in \mathbb{Z}: (c_1 n + c_2 m) = k\cdot d$.

Consecuencia:

i) d/n y $d/m \Longrightarrow d/(n + m)$.

ii) d/n y $d/m \Longrightarrow d/(n - m)$.

iii) $d/n \Longrightarrow d/k\cdot n$, $k \in \mathbb{Z}$

iv) d/n y $n/m \Longrightarrow d/m$. **Demostración** (Ejercicio).

Proposición 4.0.1 *Sean* $a, b, c \in \mathbb{N}$. *Si* $a = b\cdot c$, *entonces* $b \leq a$ *y* $c \leq a$.

Demostración $1 \leq b \Longrightarrow c\cdot 1 \leq c\cdot b \Longrightarrow c \leq a$.

$1 \leq c \Longrightarrow b\cdot 1 \leq b\cdot c \Longrightarrow b \leq a$.

4.1 Numeros primos

Para un número entero n cualquiera, el conjunto de sus divisores que se denota D_n es finito.

Ejemplo 4

$D_{12} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.

$D_{15} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$.

Definición 4.1.1 *$p \in \mathbb{Z}$ se llama número primo si $D_p = \{\pm 1, \pm p\}$, es decir p posee 4 divisores distintos.*

Con esta definición se tiene 1 y -1 no son primos, sólo tienen 2 divisores.

2 es el menor primo positivo. Otros números primos son 5, 7, -7, -11.

En busca de simplicidad se restringen los resultados clásicos de divisibilidad al conjunto de los enteros positivos.

Por lo tanto vale recordar la definición de número primo conocida desde la primaria.

Definición 4.1.2 *$p \in \mathbb{N}$ es un número primo si posee solamente dos divisores diferentes: 1 y p.*

Un número que no es primo se llama compuesto.

Ejemplo 5 :

2, 3, 5, 7, 11, 13 son primos y 4, 6, 8, 10, 21 son compuestos.

Teorema 4.1.1 *Teorema fundamental de la aritmética.*

Todo entero positivo $n > 1$ se puede expresar como producto de números primos y esta expresión es única.

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_l^{k_l}$$

Ejemplo 6

$75 = 3 \cdot 5^2$

$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$

Si se quiere usar los mismos números primos en la descomposición de 75, 84 y 735 se puede escribir:

$75 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^0$

$84 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1$

$735 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^2$

4.2 Máximo Común Divisor (MCD)

Dado un entero positivo cualquiera n, su conjunto de divisores positivos es finito y se denota D_n^+ por ejemplo:

$D_{42}^+ = \{1, 2, 3, 6, 7, 21, 42\}$ y $D_{36}^+ = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

Los divisores comunes de 42 y 36 son: 1, 2, 3 y 6. Podría representarse este conjunto por $D_{36 \wedge 42}^+$ (divisores positivos de 36 y 42). Es decir $D_{36 \wedge 42}^+ = D_{36}^+ \bigcap D_{42}^+$.

El máximo común divisor de 36 y 42 es el número mayor de $D_{36 \wedge 42}^+$, o sea 6.

Observe que 6 no es solamente el mayor divisor común de 42 y 36, sucede que cualquier divisor común de 42 y 36 divide a 6.

A continuación se formaliza esta idea:

Definición 4.2.1 *Sean $a, b, d \in \mathbb{Z}$ si d/a y d/b se dice que d es divisor común de a y b.*

El mayor d con esta propiedad se llama el máximo común divisor de a y b y se denota $MCD(a,b)$.

Ejemplo 7

Observe: $MCD(75,84) = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 3$.

Teorema 4.2.1 *Sea $MCD(a,b) = d$, entonces*

i) $\exists s, t \in \mathbb{Z}$ *tales que* $d = sa + tb$.

ii) $c/a \ \wedge \ c/b \Longrightarrow \ c/d$.

Demostración

i Sea m el menor número natural que se escribe de la forma $m = sa + tb$.

Se mostrará que m/a.

Por el algoritmo de la división $a = q \cdot m + r$ con $0 \leq r < m$. Puede ocurrir alguna de las dos situaciones: $r \neq 0$ o $r = 0$.

Si $r \neq 0$, entonces $r = a - qm = a - q(sa + tb) \Longrightarrow r = a(1 - qs) + tqb = s'a + t'b$, esto es contradictorio con el hecho de que m es el menor entero positivo que se puede escribir de la forma $sa + tb$.

Entonces $r = 0$ lo que indica que $a = q \cdot m$.

$\therefore .m/a$.

Similarmente se muestra que d/b.

Se deduce que m es divisor común de a y b.

ii Sea c un divisor común de a y b, es decir: c/a y c/b, por el teorema 1.0.2 se tiene $c/c_1a + c_2b$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ en particular para $c_1 = s$ y $c_2 = t$ por tanto $c/sa+tb$; i.e. c/m y en consecuencia $m \geq c$. Se concluye que m es el mayor divisor común de a y b.

Ejemplo 8

$MCD(3,5) = 1$.

Existen varias formas de combinar el 3 y el 5 con ayuda de los enteros s y t.

Pero de todas las combinaciones positivas posibles, la menor es la que muestra al $MCD(3,5)$:

$$\begin{array}{lll} 4 = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 5 & s = 3, & t = -1 \\ 3 = -4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 & s = -4, & t = 3 \\ -3 = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 5 & s = 4, & t = -3 \\ 2 = -1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & s = -1, & t = 1 \\ 1 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 & s = 2, & t = -1 \end{array}$$

Definición 4.2.2 *Si $MCD(a,b)=1$, se dice que a y b son primos relativos.*

Proposición 4.2.1 *Si p es primo, entonces $MCD(p,a)=1$ o p.*

Demostración Como p es primo, posee dos divisores 1 y p.
Se tienen dos posibilidades $p/a \vee p\not| a$.

i) Si p/a, los divisores comunes de p y a son p y 1. Como $p>1$ entonces $MCD(a,p)=p$.

ii) Si $p\not| a$, sólo hay un divisor común de p y a, $MCD(p,a)=1$.

Proposición 4.2.2 *Sea p un primo y $p/a\cdot b$, entonces $p/a \vee p/b$.*

Demostración Supongase que $p\not| a$. Se mostrará que p/b.
Como $p\not| a$, por la proposición anterior $MCD(p,a)=1$, y por teorema 1.1.2 $\exists s,\ t\in\mathbb{Z}$ tal que $sp+ta=1$, si multiplicamos por b esta igualdad se tiene:

$$spb+tab=b \tag{3}$$

Por hipótesis $p/a\cdot b$ de donde $a\cdot b=k\cdot p$. Sustituyendo en (3) ab por kp tenemos:

$$spb+t\cdot kp=b \Longrightarrow p[sb+t\cdot k]=b$$

Como $sb+t\cdot k$ es entero, se concluye que p/b.

¿Cómo hallar el $MCD(a,b)$?

Sean $a,\ b\in\mathbb{N},\ a>b>0$.

Utilizando el algoritmo de la división reiteradamente:

$$\begin{array}{llll}
\text{con} & a \text{ y } b: & a=k_1b+r_1, & 0\le r_1<b\\
\text{con} & b \text{ y } r_1: & b=k_2r_1+r_2, & 0\le r_2<r_1\\
\text{con} & r_1 \text{ y } r_2: & r_1=k_3r_2+r_3, & 0\le r_3<r_2\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\text{con} & r_{n-2} \text{ y } r_{n-1}: & r_{n-2}=k_nr_{n-1}+r_n & 0\le r_n\le r_{n-1}\\
\text{con} & r_{n-1} \text{ y } r_n: & r_{n-1}=k_{n+1}r_n+r_{n+1} & 0\le r_{n+1}<r_n.
\end{array}$$

Observe que:

i) $a=k_1b+r_1 \Longleftrightarrow r_1=a-k_1b$. Todo divisor común de b y a es divisor de r_1 y todo divisor común de b y r_1 es divisor de a, por lo que

$$MCD(a,b)=MCD(b,r_1).$$

De la misma forma $MCD(b,r_1)=MCD(r_1,r_2)=MCD(r_2,r_3)\ldots$

ii) $b>r_1>r_2>r_3\ldots$ es decir, el residuo llegará a ser cero; esto es $r_{n+1}=0$. De *i)* y *ii)* se tiene que $r_n=MCD(a,b)$.

Ejemplo 9

Hallar $MCD(87, 60)$.

$$\begin{array}{lll} 1) & 87 = 1\cdot 60 + 27 & r_1 = 27 \\ 2) & 60 = 2\cdot 27 + 6 & r_2 = 6 \\ 3) & 27 = 4\cdot 6 + 3 & r_3 = 3 \\ 4) & 6 = 2\cdot 3 + 0 & r_4 = 0 \end{array}$$

$MCD(87, 60) = 3$.

Usando el mismo algoritmo es posible hallar s y t tales que $3 = s\cdot 87 + t\cdot 60$.

De 3): $3 = 27 - 4\cdot 6$ (5)

de 2): $6 = 60 - 2\cdot 27$

en (5) se sustituye el 6 por $60 - 2\cdot 27$:

$$3 = 27 - 4\cdot(60 - 2\cdot 27)$$
$$3 = 27 - 4\cdot 60 + 8\cdot 27$$
$$3 = 9\cdot 27 - 4\cdot 60 \quad (6)$$

de 1) $27 = 87 - 1\cdot 60$, sustituyendo el 27 en (6)

$$3 = 9\cdot(87 - 1\cdot 60) - 4\cdot 60$$
$$3 = 9\cdot 87 - 1\cdot 60 - 4\cdot 60$$
$$3 = 9\cdot 87 - 5\cdot 60$$

$s = 9$ y $t = -5$

4.3 Mínimo Común Múltiplo (MCM).

Recuérdese que n es múltilplo de b si y sólo si b es divisor de n. Esto es que $\exists k \in \mathbb{Z} : n = kb$.

Así, por ejemplo, los múltiplos no negativos de 6 son 0, 6, 12, 18, 24, ... y los múltiplos negativos son -6, -12, -18, ...

Se tratará solamente con múltiplos no negativos, como se hizo en el caso del MCD.

Dado $b \in \mathbb{N}$, el conjunto de múltiplos positivos de b es infinito, se identifica con M_b^+:

$$M_b^+ = \{b, 2b, 3b, 4b, \ldots\}$$

Por ejemplo:

$$M_6^+ = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \ldots\}$$

$$M_8^+ = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, \ldots\}$$

Los múltiplos comunes de 6 y 8 son:

$$M_{6\wedge 8}^+ = \{24, 48, 72, \ldots\}$$

El mínimo común múltiplo de 6 y 8 es el número menor de $M_{6\wedge 8}^+$.

De manera formal:

Definición 4.3.1 *Sean a, b, $k \in \mathbb{Z}^+$ si a/k y b/k se dice que k es un múltiplo común de a y b. El menor k que cumple esta condición se le llama mínimo común múltiplo de a y b y se denota $MCM(a, b)$.*

Instituto de Investigación para el Mejoramiento de la Educación Costarricense (IIMEC) Facultad de Educación

Ejemplo 10 Si $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1$ y $b = 2^0 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$, entonces $MCM(a,b) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^2$ y $MCD(a,b) = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1$.

Teorema 4.3.1 *Si $a, b, k \in \mathbb{Z}^+$, entonces* $MCD(a,b) \cdot MCM(a,b) = a \cdot b$.

Demostración Sean $a = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ y $b = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, la descomposición de a y b en factores primos.

$$MCD(a,b) = p_1^{\min(m_1,n_1)} p_2^{\min(m_2,n_2)} \cdots p_k^{\min(m_k,n_k)}$$
$$MCM(a,b) = p_1^{\max(m_1,n_1)} p_2^{\max(m_2,n_2)} \cdots p_k^{\max(m_k,n_k)}$$

Note que si $\max(m_i, n_i) = m_i$, entonces $\min(m_i, n_i) = n_i$ o viceversa.

Partiendo del lado izquierdo de la identidad que quiere probarse

$$\begin{aligned} MCD(a,b) \cdot MCM(a,b) &= p_1^{\min(m_1,n_1)} p_1^{\max(m_1,n_1)} p_2^{\min(m_2,n_2)} \cdots p_k^{\min(m_k,n_k)} p_k^{\max(m_k,n_k)} \\ &= p_1^{m_1+n_1} p_2^{m_2+n_2} \cdots p_k^{m_k+n_k} \\ &= p_i^{m_1} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{m_2} p_2^{n_2} \cdots p_k^{m_k} \cdot p_k^{n_k} \\ &= (p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k})(p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}) \\ &= a \cdot b \end{aligned}$$

Ejercicios:

1. Para m y b dados calcular q y r tales que $m = qb + r$.

   (a) $m = 100$, $b = 8$.

   (b) $m = -100$, $b = 8$.

   (c) $m = -100$, $b = -8$.

   (d) $m = -79$, $b = 5$.

   (e) $m = 547$, $b = 6$.

2. Sean $a = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 11$, $b = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^3 \cdot 11^2$, $c = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$.

   (a) Calcular $MCD(a,b)$, $MCM(a,b)$.

   (b) Calcular $MCD(a,b,c)$, $MCM(a,b,c)$.

3. Si $n, m \in \mathbb{Z}^+$ y su expresión como producto de primos es

$$n = p_1^2 \cdot p_2^3 \cdot p_5 \cdot p_6$$
$$m = p_1 \cdot p_3^2 \cdot p_5^2 \cdot p_7^3$$

   (a) Calcular $MCM(n,m) = k$ y $MCD(n,m) = d$.

   (b) Calcular $MCD\left(\frac{n}{d}, \frac{m}{d}\right)$.

(c) Calcular $MCM\left(\frac{k}{n}, \frac{k}{m}\right)$.

4. Calcular $MCD(a,b) = d$ y encontrar $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $d = sa + tb$.

(a) $a = 84, \quad b = 45.$

(b) $a = 180, \quad b = 75.$

(c) $a = 414, \quad b = 943.$

(d) $a = 285, \quad b = 2926.$

5. Muestre que $a, b \in \mathbb{Z}^+$ y a/b y b/a, entonces $a = b$.

6. Muestre que si $MCD(a,c) = 1$ y c/ab entonces c/b.

7. Muestre que si $MCD(a,c) = 1$, a/m, c/m entonces $a \cdot c/m$

8. Muestre que $MCD(ca, cb) = cMCD(a,b)$.

9. Muestre que $MCD(a, ab) = a$.

10. Muestre que $MCD(a,b) = 1$, entonces $MCM(a,b) = a \cdot b$.

11. Si $m/a \cdot b$ y $m/bd + c$, entonces m/ac.

12. (a) Muestre que si $MCD(a,b) = d$, entonces $MCD\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

(b) Muestre que si $MCM(a,b) = m$, entonces $MCD\left(\frac{m}{a}, \frac{m}{b}\right) = 1$.

13. Pruebe que si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos fracciones en su expresión mas simple y si $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ es un entero, entonces d/b y b/d, esto es $b = \pm d$.

14. Muestre que $MCD(a,b) = MCD(a, b + ka)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

15. Muestre que si $MCD(a,b) = 1$, entonces $MCD(a+b, a-b) = 1$ o 2.

16. Si $a, b \in \mathbb{Z}^+$, entonces $MCM(a, ab) = ab$.

Capítulo 5

Sistemas numéricos

El lector conoce desde sus años escolares las leyes que rigen las operaciones $+, -, \bullet, \div$ de números racionales. Bajo esta consideración se presenta aquí un resumen de los conceptos más importantes para el curso.

Definición 5.0.2 *El conjunto de números racionales que se denota con el símbolo* $\mathbb{Q}$ *se define*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

La suma y la multiplicación de racionales se definen

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}; \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Observe que

1. $\forall a \in \mathbb{Z} \;\; a = \frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$ con lo que $Z \subseteq \mathbb{Q}$.

2. Las fracciones $\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}$ representan el mismo número racional.

Definición 5.0.3 *Se dice que* $\frac{a}{b}$ *es la representación canónica de un número racional si* $MCD(a, b) = 1$ *y* $b > 0$.

5.1 Forma decimal de los racionales

Al tomar dos enteros a y b y hacer la división $a \div b$ el residuo siempre es menor a b, por lo tanto algún residuo será cero o al llegar al b-ésimo decimal habrá algún residuo repetido. Esto produce tres posibilidades para el resultado.

1. Que no posea decimales

210	6
30	35
0	

en este caso $(a \div b) \in \mathbb{Z}$ o se dice $b|a$.

2. Que posea una forma decimal finita

$$\begin{array}{r|l} 3247 & 25 \\ \hline 74 & 129,88 \\ 247 & \\ 220 & \\ 200 & \\ 0 & \end{array}$$

3. Que posea una forma décimal infinita, porque se obtuvo un residuo repetido que produce en el cociente cierto número de cifras repetidas indefinidamente

$$\begin{array}{r|l} 25 & 6 \\ \hline 10 & 4,1666\ldots \\ 40 & \\ 40 & \\ 40 & \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10166 & 4995 \\ \hline 17600 & 2,0352352 \\ 26150 & \\ 11750 & \\ 17600 & \\ 26150 & \\ 1175 & \end{array}$$

por lo que $\frac{25}{6} = 4,1666\ldots = 4,1\bar{6}$, $\quad \frac{101666}{4995} = 2,0352352\ldots = 2,0\overline{352}$.

En resumen, la forma decimal de un racional es un entero o un entero con parte decimal finita o un entero con parte decimal infinita y periódica.

Para pasar un racional de la forma decimal a fracción se presentan tres casos, que se ilustran con ejemplos:

1. Si $q \in \mathbb{Z}$, se puede escribir $\frac{q}{1}$.
2. Si la expasión decimal es finita: $q = 2,78$ entonces $q = \frac{278}{100}$.
3. Si la expansión decimal es infinita periódica: $q = 7,\overline{326}$ entonces

$$\begin{array}{rcr} 1000q & = & 7326,\overline{326} \\ -q & = & -7,\overline{326} \\ \hline 999q & = & 7319 \\ \therefore q & = & \frac{7319}{999} \end{array}$$

Así la forma decimal de un número racional lo caracteriza, permitiendo que el conjunto de racionales se pueda definir también como:

$$\mathbb{Q} = \{x/x \text{ es entero o } x \text{ posee parte decimal finita o } x \text{ posee parte decimal infinita periódica}\}$$

5.2 Orden en $\mathbb{Q}$

Si $q_1 = \frac{a}{b}$ y $q_2 = \frac{c}{d}$ están en la forma canónica, se dice que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si y solo sí $ad < bc$.

En los números racionales con la relación $<$ se tiene que, dados dos números q_1 y q_2 se cumple una y solamente una de las propociciones siguientes $q_1 = q_2$, $q_2 < q_1$, $q_1 < q_2$.

Definición 5.2.1 *Se dice que* $q_1 \leq q_2$ *si* $q_1 < q_2$ *o* $q_1 = q_2$.
Se dice que $q_2 > q_1$ *si* $q_1 < q_2$ *y se dice que* $q_2 \geq q_1$ *si* $q_1 \leq q_2$.

5.2.1 Densidad en $\mathbb{Q}$.

En $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ se tiene que si n es entero, entonces entre n y $n+1$ no existe ningún entero. Mientras que en $\mathbb{Q}$ se cumple la siguiente proposición

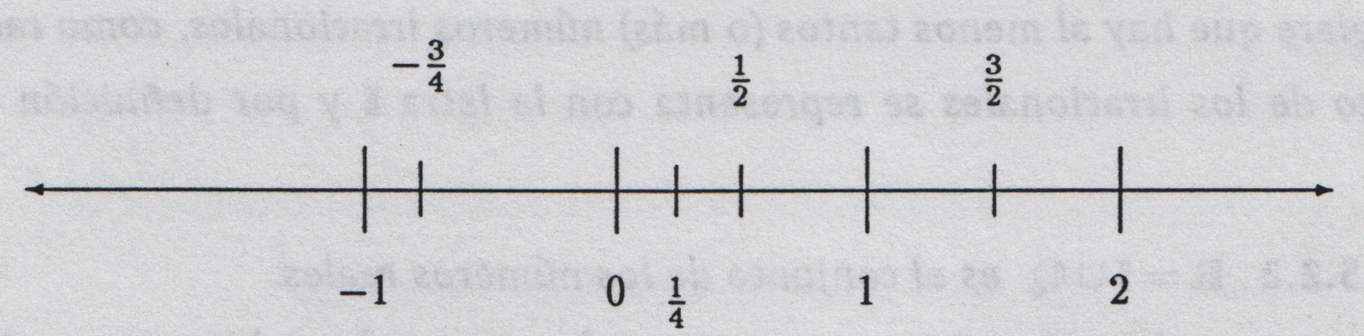
Proposición 5.2.1 *Si* $q_1 < q_2$, *entonces* $\exists q_3 \in \mathbb{Q}: q_1 < q_3 < q_2$.
Demostración: Ejercicio.

5.2.2 $\mathbb{Q}$ es totalmente ordenado

La relación $\leq$ en $\mathbb{Q}$ posee las siguientes propiedades

1. $q \leq q \ \forall q \in \mathbb{Q}$. (Reflexividad de $\leq$ en $\mathbb{Q}$)
2. Si $q_1 \leq q_2$ y $q_2 \leq q_1$ entonces, $q_1 = q_2$. (antisimetría de $\leq$ en $\mathbb{Q}$)
3. Si $q_1 \leq q_2$ y $q_2 \leq q_3$ entonces, $q_1 \leq q_3$. (transitividad de $\leq$ en $\mathbb{Q}$)
4. Si q_1 y q_2 son dos elementos tomados arbitrariamente de $\mathbb{Q}$, alguna de las dos proposiciones $q_1 \leq q_2$ o $q_2 \leq q_1$ debe cumplirse.

La cuarta propiedad se conoce como linealidad de $\leq$ y permite acomodar los elementos de $\mathbb{Q}$ "en fila" en una recta, es decir $\mathbb{Q}$ queda totalmente ordenadocon ayuda de la relación $\leq$. Para esto se elige un punto cualquiera en la recta que se denota por 0 (cero) y un segundo punto a la derecha del cero se denota por 1. Elegidos estos dos, se cuenta con una escala que permite colocar a todos los racionales, por ejemplo para $\frac{1}{2}$ se elige el punto medio entre 0 y 1, para $\frac{1}{4}$ el punto medio entre 0 y $\frac{1}{2}$, etc.

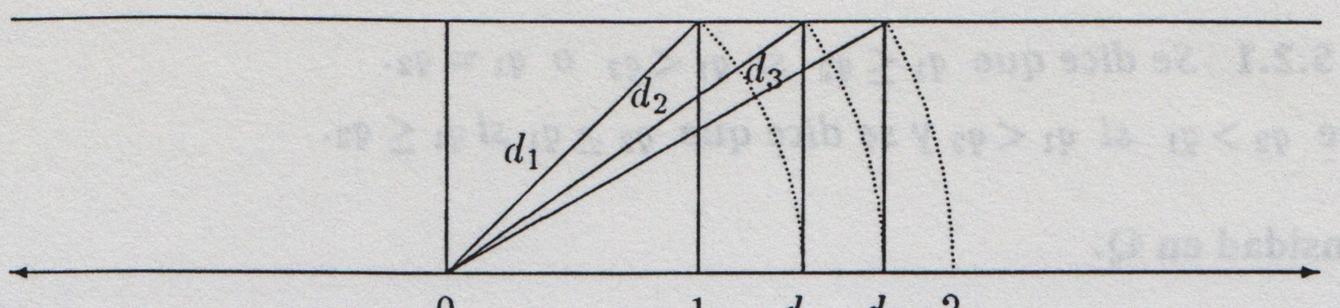


Siempre se encontrará un punto en la recta para cada número racional. Sin embargo, sobran muchos puntos en la recta al colocar en ella a todos los elementos de $\mathbb{Q}$.

Para cada punto en la recta que no le corresponde un racional, se define un número que se llamará irracional.

Los números irracionales "llenan los huecos" en la recta que dejan los racionales. Pero ¿Existen estos números? ¿ Son muchos ? .

Considere dos rectas, separadas por una distancia de una unidad:



¿Cuánto mide la diagonal del cuadrado de lado 1?

Según el teorema de Pitágoras $d_1^2 = 1+1 \Longrightarrow d_1^2 = 2$.

Pero no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

¿Cuánto mide d_2 y d_3 en la figura anterior?

Proposición 5.2.2 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Prueba (por contradicción).

Supongamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, *entonces existe una fracción* $\frac{a}{b}$ *canónica tal que* $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$; *esto es* $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ *y* $MCD(a,b) = 1$.

$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \Longleftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Longleftrightarrow a^2 = 2b^2 \Longleftrightarrow a^2$ *es par* $\Longleftrightarrow a$ *es par* $\Longleftrightarrow a = 2k$

$\Longleftrightarrow a^2 = (2k)^2 = 2b^2 \Longleftrightarrow 4k^2 = 2b^2 \Longleftrightarrow 2k^2 = b^2 \Longleftrightarrow b^2$ *es par* $\Longleftrightarrow b$ *es par.*

¡a *y* b *son pares! Esto contradice la hipótesis* $MCD(a,b) = 1$.

$$\therefore \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

De manera similar, el lector puede mostrar que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ *y en general* $\sqrt{p}$ *con* p *primo no son racionales. Tampoco son racionales* $\sqrt{2}\cdot q$, $\sqrt{2}+q$, $\sqrt{3}\cdot q$ *para cualquier* $q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$.

Observe que por cada $q \in \mathbb{Q}$ *hay un racional de la forma* $\sqrt{2}+q$, *igualmente para* $\sqrt{3}+q$ *o para* $\sqrt{5}+q$.

Lo que sugiere que hay al menos tantos (o más) números irracionales, como racionales.

El conjunto de los irracionales se representa con la letra $\mathbb{I}$ *y por definición de* $\mathbb{I}$ *se tiene que* $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.

Definición 5.2.2 $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$ *es el conjunto de los números reales.*

Para cada punto en la recta existe un número real y para cada real hay un punto en la recta, esto se resume diciendo que $\mathbb{R}$ *es continuo.*

Ejercicios

1. *Muestre que la suma y el producto de números racionales es un racional.*
2. *Muestre que* $\sqrt{3}$ *no es racional.*
3. *Muestre que* $\sqrt{p}$ *no es racional,* p *primo.*

4. *Muestre que si* $q \in \mathbb{Q}$, *entonces* $\sqrt{2}+q$ *no es racional.*
5. *Muestre que si* $q \in \mathbb{Q}$, *entonces* $q \cdot \sqrt{3}$ *no es racional.*
6. *Encontrar una fracción* $\frac{a}{b}$; $a, b \in \mathbb{Z}$ *que representa al número racional:*
   (a) $5, 23\overline{23}$.
   (b) $78.5723\overline{723}$.
   (c) $43, 48\overline{48}$.
7. *Sean* $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $q_1 < q_2$ *mostrar que* $\exists q_3 \in \mathbb{Q}$: $q_1 < q_3 < q_2$.

5.3 El sistema de los números reales

Se asume que en el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) *están definidos la suma y la multiplicación con las propiedades siguientes:*

Para la suma:

1. La suma es cerrada en $\mathbb{R}$, $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ $[r_1 + r_2 \in \mathbb{R}]$.
2. Es asociativa $\forall r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ $[(r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3)]$.
3. Existe elemento neutro "o" para la suma $0 + r = r + 0 = r$, $\forall r \in \mathbb{R}$.
4. Existencia de inverso aditivo $\forall r \in \mathbb{R}, \exists -r \in \mathbb{R}$ $[r + (-r) = (-r) + r = 0]$.
5. Es conmutativa $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ $[r_1 + r_2 = r_2 + r_1]$.

   Para la multiplicación

6. Es cerrada $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}\,[r_1 \cdot r_2 \in \mathbb{R}]$.
7. Es asociativa $\forall r_1, r_3, r_3 \in \mathbb{R}$ $[(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3)]$.
8. Existe elemento neutro para la multiplicación $1 \cdot r = r \cdot 1 = r$, $\forall r \in \mathbb{R}$.
9. Existencia del inverso multiplicativo $\forall r \in \mathbb{R}$, $\exists r^{-1} \in \mathbb{R}$ $[r \cdot r^{-1} = r^{-1} \cdot r = 1]$; $r \neq 0$.
10. La multiplicación es conmutativa $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ $[r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1]$.
11. La multiplicación es distributiva con respecto a la suma $\forall r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ $[r_1(r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3]$.

    Consecuencias importantes

    Sean r_1, r_2 y $c \in \mathbb{R}$.

    (a) 0 y 1 son únicos.
    (b) $r_1 + c = r_2 + c \iff r_1 = r_2$.
    (c) $c \neq 0$; $r_1 \cdot c = r_2 \cdot c \iff r_1 = r_2$.
    (d) $0 \cdot r = 0$, $\forall r \in \mathbb{R}$

(e) $r_1 \cdot r_2 = 0 \iff r_1 = 0 \vee r_2 = 0$.

(f) Si $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, la ecuación $ax + b = 0$ posee una única solución $x = -\frac{b}{a}$.

Demostración Se mostrará solamente la consecuencia (e): $r_1 \cdot r_2 = 0 \iff r_1 = 0 \vee r_2 = 0$.

Supóngase que $r_2 \neq 0$, por 9. $\exists r_2^{-1}$ tal que $r_2 \cdot r_2^{-1} = 1$.

$r_1 \cdot r_2 = 0$ multiplicado por r_2^{-1}

$r_1 \cdot r_2 \cdot r_2^{-1} = 0 \cdot r_2^{-1}$ $\quad r_2$ y r_2^{-1} son inversos

$r_1 \cdot 1 = 0 \cdot r_2^{-1}$ $\quad 1$ es neutro

$r_1 = 0 \cdot r_2^{-1}$ por consecuencia (d)

$r_1 = 0$.

Ejemplo Resolver la ecuación $r^2 + 10r + 9 = 0$.

La expresión $r^2 + 10r + 9$ se factoriza $(r + 1)(r + 9)$ y por consecuencia (e):

$(r + 1)(r + 9) = 0 \iff r + 1 = 0 \vee r + 9 = 0 \iff r = -1 \vee r = -9$.

$\therefore$ conjunto solución $\{-1, -9\}$.

Otros resultados útiles que se pueden deducir de las propiedades (1) – (11) son las fórmulas notables y el teorema del factor.

Fórmulas notables.

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
4. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.
5. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.
6. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
7. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
8. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.
9. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Teorema 5.3.1 Teorema del Factor

Si α es un cero del polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (esto es $p(\alpha) = 0$), entonces el polinomio $p(x)$ es divisible por $x - \alpha$.

Ejemplo

Sea $p(x) = x^3 + 8x^2 + 14x - 3$, si $x = -3$, $p(-3) = -27 + 72 - 42 - 3 = 0$. Como -3 es un cero de $p(x)$, entonces $p(x)$ es divisible por $x + 3$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 8x^2 + 14x - 3 & x + 3 \\
\hline
-x^3 - 3x^2 & x^2 + 5x - 1 \\
\hline
5x^2 + 14x - 3 & \\
-5x^2 - 15x & \\
\hline
-x - 3 & \\
x + 3 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

y el polinomio $p(x)$ puede escribirse $p(x) = (x + 3)(x^2 + 5x - 1)$.

Si se quiere factorizar completamente $p(x)$ se puede aplicar la fórmula general para encontrar los ceros de $x^2 - 5x - 1$ así $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 4}}{2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$

$$\therefore p(x) = (x + 3)\left(x - \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}\right)\left(x - \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}\right).$$

5.4 Orden en $\mathbb{R}$

Además de los axiomas (1) a (11) en $\mathbb{R}$ se define la relación $\leq$ que posee las mismas propiedades (a) - (d) enunciadas para los números racionales.

Al igual que los racionales, los reales quedan totalmente ordenados bajo la relación $\leq$.

Definición 5.4.1 *Se llaman intervalos con extremos a y b, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ a los conjuntos*

$]a, b[= \{x / a < x < b\}$ *intervalo abierto.*

$[a, b] = \{x / a \leq x \leq b\}$ *intervalo cerado.*

$[a, b[= \{x / a \leq x < b\}$ *intervalo semiabierto.*

$]a, b] = \{x / a < x \leq b\}$.

Los intervalos $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$, $]-\infty, b]$ se dicen ser intervalos no acotados.

5.4.1 Valor absoluto

Para cada número real x se define su valor absoluto como la distancia que existe desde el cero hasta x y se representa por $|x|$, formalmente

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0. \end{cases}$$

Propiedades:

1. $-|x| \leq x \leq |x|$.
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
3. $|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.
4. $|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

5.4.2 Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Se refiere a que entre dos números reales cualesquiera, siempre hay un racional,

$$\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 < r_2 \; \exists \, q \in \mathbb{Q}: \;\; r_1 < q < r_2.$$

Ejemplo

Entre 3 y π existe $q = 3,14$.

Entre $3,14$ y π existe $q = 3,1415$.

Entre $3,1415$ y π existe $q = 3,141592$.

Así se tiene: $q_1 = 3,141592 < \pi < 3,141593 = q_2$ y al aproximar π con cualquiera de los racionales q_1 o q_2 se comete un error menor que 5×10^{-6}.

La importancia de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ radica en que siempre es posible aproximar cualquier irracional, tanto como se desee, con un número racional.

Desde los cálculos cotidianos más sencillos hasta los más complejos cáculos en el estudio de los fenómenos químicos, mecanicos, físicos, entre otros, se hacen con los números racionales a pesar de que $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^3$ son los modelos matemáticos del tiempo y el espacio respectivamente. Esto es así gracias a que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y siempre es posible medir el margen de error al aproximar con los valores racionales resultados que casi siempre son irracionales.

Ejercicios

1. Factorice usando fórmulas notables.

   (a) $\frac{x^2}{4} + 3x + 9$.

   (b) $x^8 - y^8$.

   (c) $\frac{1}{t^2} + \frac{10}{t} + 25$.

   (d) $a^2 - x^2 + b^2 - 4 - 2ab + 4x$.

   (e) $\frac{a^3}{27} - \frac{125}{8}$.

   (f) $\frac{a}{b^2} + \frac{6\sqrt{a}}{b} + 9$.

2. Factorizar usando el teorema del factor.

   (a) $-x^3 + 7x - 6$.

   (b) $x^3 - 4x^2 + x + 6$.

   (c) $x^4 - 2x^2 - 3x - 2$.

3. Factorizar.

   (a) $x^3 - 27x + 54$.

   (b) $2x^3 - 3x^2 + 1$.

4. Resolver las siguientes ecuaciones.

   (a) $(x + 1)(x - 3) = 0$.

   (b) $9x = x^2 + 14$.

   (c) $x(x - 2) = 3$.

   (d) $3y^2 = 4 - 11y$.

   (e) $\pi x^2 + x = 5$.

   (f) $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3}) = 0$.

5. Resolver las siguientes desigualdades.

   (a) $(x - 2)(x - 5) < 0$.

   (b) $x^2 - 7x + 12 \leq 0$.

   (c) $x(x + 1) < 2$.

   (d) $x(x - 2) \geq 3$.

   (e) $y(2y + 1) > 6$.

   (f) $(x + 2)(x - 3) > 2 - x$.

   (g) $x^2 \geq 4$.

   (h) $x^2 + 1 < 0$.

   (i) $\frac{x - 7}{x + 4} \geq 0$.



Instituto de Investigacion
para el Mejoramiento de la
Educación Costarricense (IIMEC)
Facultad de Educación

(j) $-x^2+3x-4<0$.

6. Resolver las siguientes ecuaciones.

(a) $|3-7x|=4$.

(b) $\left|\frac{1}{x}-3\right|=4$. $\left|3-\frac{1}{x-2}\right|=7$.

(c) $|x-9|=\sqrt{5}$.

(d) $|x+5|-|x-2|=4$.

(e) $|x|+|3-x|=0$.

(f) $\frac{|x-3|}{|4+x|}=2$.

(g) $|x^2-2x-8|=9$.

7. Resolver las siguientes inecuaciones.

(a) $|3-7x|<4$.

(b) $\left|\frac{1}{x}-3\right|\geq 4$. $\left|3-\frac{1}{x-2}\right|\leq 7$.

(c) $|x-9|>\sqrt{5}$.

(d) $|x+5|-|x-2|\geq 4$.

(e) $|x|+|3-x|<10$.

(f) $\frac{|x-3|}{|4+x|}<2$.

(g) $|x^2-2x-8|\geq 9$.

8. Mostrar que si $a\neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1}=a$.

9. Mostrar que $\forall a\neq 0$, entonces $a\cdot 0=0$.

10. Mostrar que si $a\leq b$ y $0\leq c\leq d$, entonces $ac\leq bd$.

11. Mostrar que si $a\leq b$ y $0<c$, entonces $\frac{a}{c}\leq\frac{b}{c}$.

12. Mostrar que si $a\leq b$ y $c<0$ entonces $\frac{b}{c}\leq\frac{a}{c}$.

13. Si $a,b\in\mathbb{R}$ no nulos, $a\leq b$, entonces:

(*i*) $\frac{1}{b}\leq\frac{1}{a}$ si $a\cdot b>0$ (*ii*) $\frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}$ si $a\cdot b<0$

14. Si $a,b\in\mathbb{R}$ mostrar que $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$. Use esto para calcular $(10725)^2-(9275)^2$.

15. Usando las fórmulas notables simplificar:

(a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

(b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

(c) $a>0$, $\sqrt{2a^2+2a\sqrt{2a}+a}$

(d) $\sqrt{11+2\sqrt{28}}$

16. Para $a\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$ simplificar $\dfrac{a-\frac{a-1}{a+1}}{a-1}-\dfrac{a+\frac{a+1}{a-1}}{a+1}$.

17. Si $ab > 0$ y $a \neq b$. Muestre que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$.

18. Si $a > 0$, $b > 0$, entonces $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

19. Si $a^2 + b^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$, entonces $ax + by \leq 1$.

20. Si a, b, c, d satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$, entonces $a = b = c = d$.

21. Si $a > b > 0$ mostrar que $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} > \frac{a - b}{a + b}$.

22. Si $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 0$, entonces $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Capítulo 6

Relaciones Binarias

Es usual establecer relaciones entre objetos, entre personas, entre objetos y entes abstractos. En términos generales se puede decir que las relaciones se hacen entre los elementos de dos o más conjuntos.

En la ciencia de la computación el estudio de las relaciones de equivalencia es necesario porque clasifican los elementos, forman entidades. No menos necesarias resultan las relaciones de orden para construir cadenas (ordenadas) de elementos dentro de un conjunto.

Ejemplo 1

Si A es el conjunto de camisas y B el conjunto de pantalones de Sergio:

$$A = \{c_1, c_2, \ldots, c_6\} \qquad B = \{p_1, p_2, \ldots, p_5\}$$

En el producto cartesiano de $A \times B$, Sergio construye el subconjunto $R = \{(c_1, p_1), (c_2, p_5), (c_2, p_2), (c_3, p_5), (c_4, p_4), (c_4, p_5), (c_5, p_2), (c_5, p_4)\}$.

Cada par ordenado de R representa una forma en que Sergio decide vestirse. Por ejemplo, le gusta usar la camisa c_3 únicamente con el pantalón p_5. $(c_1, p_5) \notin R$ indica que no usa la camisa c_1 con p_5. El criterio mediante el cual Sergio establece los pares del conjunto R es conocido para él y le permite relacionar algunas camisas con ciertos pantalones. Este criterio (o ley) es la relación. Así c_1 se relaciona con p_1 y c_2 con p_5.

Si se denota la relación con la letra $\mathcal{R}$, el símbolo $c_1 \mathcal{R} p_1$ se lee c_1 se relaciona con p_1. Y $c_1 \not\mathcal{R} p_3$ se lee c_1 no se relaciona con p_3.

En general, con muchas relaciones sucede que se observan los pares ordenados (a, b) del conjunto R, pero no se conoce explícitamente el criterio que permite asociar el elemento a con el elemento b.

No obstante, note que

$$a \mathcal{R} b \longleftrightarrow (a, b) \in R$$

Por esta razón; conocer el conjunto R es quivalente (en matemática) a conocer la relación o cirterio $\mathcal{R}$, ya que al tener los pares de R se percibe claramente cuáles elementos del primer conjunto están relacionados con cuáles del segundo conjunto. En adelante, se usan ambas variantes para definir una relación particular; mediante el criterio o dando el conjunto R.

Definición 6.0.2 *Sean A y B dos conjuntos no vacíos, una relación $\mathcal{R}$ de A en B es una tripleta $\mathcal{R} = (A, B, R)$ donde $R \subseteq A \times B$. Se denota por $\mathcal{R}: A \longrightarrow B$, se lee: sea $\mathcal{R}$ una relación de A en B.*

R– gráfico de $\mathcal{R}$

A– conjunto de salida.

B– conjunto de llegada. Si $B = A$ *se dice que* $\mathcal{R}$ *es una relación en* A.

Definición 6.0.3 *El subconjunto de elementos de* A *que están relacionados con algún elemento de* B *se llama el dominio de* $\mathcal{R}$.

El subconjunto de elementos de B *que están en relación con algún* $a \in A$ *se llama el ámbito de* $\mathcal{R}$, *esto es:*

$$Dom\ \mathcal{R} = \{a \in A / \exists\, b \in B : a\mathcal{R}b\}, \qquad Amb\ \mathcal{R} = \{b \in B / \exists\, a \in A : a\mathcal{R}b\}.$$

Ejemplo 2

a) En el ejemplo 1 se tiene

$$\text{Dom } \mathcal{R} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}, \qquad \text{Amb } \mathcal{R} = \{p_1, p_2, p_4, p_5\}$$

b) Si $A = \{a, b, c\}$ $B = \{\triangle, \bigcirc, *\}$ $R = \{(a, \triangle), (b, \triangle), (b, \bigcirc)\}$

$$\text{Dom } \mathcal{R} = \{a, b\}, \qquad \text{Amb } \mathcal{R} = \{\triangle, \bigcirc\}.$$

c) Sea $\mathcal{R}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / b = 100 - 5a\}$. Entonces:

Dom $\mathcal{R} = \{a \in \mathbb{N} / \exists\, b \in \mathbb{N},\ (a, b) \in R\} = \{a \in \mathbb{N} / \exists\, b \in \mathbb{N},\ b = 100 - 5a\}$

como $b \in \mathbb{N}$ se tiene que $b \geq 0$ de donde $20 \geq a \geq 0$ y por lo tanto

Dom $\mathcal{R} = \{a \in \mathbb{N} / 20 \geq a \geq 0\}$.

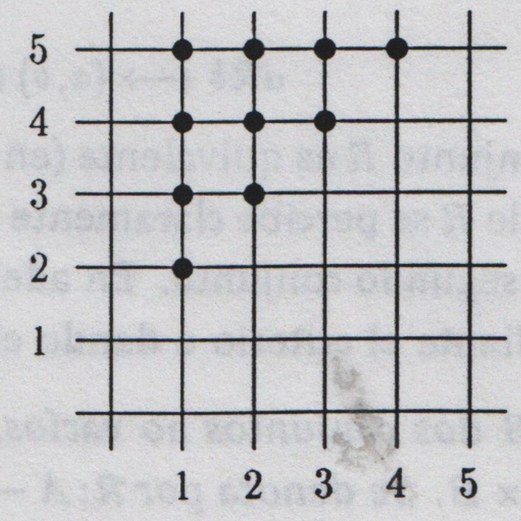
Amb $\mathcal{R} = \{b \in \mathbb{N} / \exists\, a \in \mathbb{N},\ (a, b) \in R\} = \{b \in \mathbb{N} / \exists\, a \in \mathbb{N},\ b = 100 - 5a\}$

dado que $a \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 20\}$ se tiene Amb $\mathcal{R} = \{0, 5, 10, 15, \ldots, 95, 100\}$.

d) Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\mathcal{R}$ una relación en A definida por $a\mathcal{R}b \longleftrightarrow a < b$. El gráfico de $\mathcal{R}$ es:

$$R = \{(a, b) \in A \times A / a < b\}$$
$$= \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$$

que se representa en el siguiente diagrama



Dom $\mathcal{R} = \{1,2,3,4\}$, Amb $\mathcal{R} = \{2,3,4,5\}$.

Definición 6.0.4 *Sea $\mathcal{R}$ una relación, $\mathcal{R} = (A,B,R)$. La inversa de $\mathcal{R}$ es la relación $\mathcal{R}^{-1} = (B,A,R^{-1})$ donde $R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A / (a,b) \in R\}$.*

Ejemplo 3

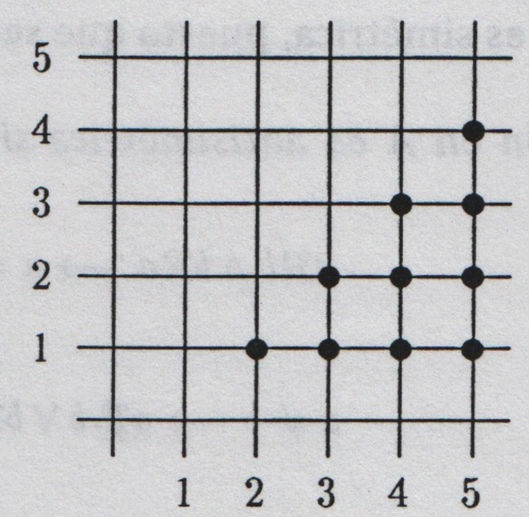
a) La inversa de la relación del ejemplo 2b) es

$$\mathcal{R}^{-1} = \{B,A,R^{-1}\} \text{ con } R^{-1} = \{(\triangle,a),(\triangle,b),(\bigcirc,b)\}.$$

b) La inversa de la relación del ejemplo 2d tiene gráfico

$R^{-1} = \{(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2),(4,3),(5,3),(5,4)\}$

como se observa en el diagrama siguiente



Definición 6.0.5 *Si $\mathcal{R}_1 = (A,B,R_1)$ y $\mathcal{R}_2 = (B,C,R_2)$ la composición de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ denotada por $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$, es la relación $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 = (A,C,R_2 \circ R_1)$, donde:*

$R_2 \circ R_1 = \{(a,c) \in A \times C / \exists\, b \in B : (a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_2\}$

Ejemplo 4

Sean $A = \{a,b,c\}$, $B = \{x,y,z\}$, $C = \{1,2\}$

$\mathcal{R}_1$ una relación de A en B con gráfico $\mathcal{R}_1 = \{(a,x),(a,z),(b,y),(c,z)\}$ y $\mathcal{R}_2$ relación de B a C con gráfico $R_2 = \{(x,1),(x,2),(y,2),(z,1)\}$.

La relación $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ de A en C queda definida por su gráfico

$$R_2 \circ R_1 = \{(a,1),(a,2),(a,1),(b,2),(c,1)\}$$

6.1 Propiedades de las relaciones

Si no se dice lo contrario, de aquí en adelante se trata de relaciones en A ($\mathcal{R}: A \longrightarrow A$).

Definición 6.1.1 *Una relación en A es reflexiva si cada elemento de a se relaciona consigo mismo,*

$$\forall a \in A : a\mathcal{R}a$$

Ejemplo 5

a) En el conjunto de los seres humanos P se define la relación $\mathcal{H}$ así:

$$x\mathcal{H}y \Longleftrightarrow x \text{ es hermano de } y$$

(hermanos= personas con el mismo padre y la misma madre.)

Se tiene que $\forall x \in P : x\mathcal{H}x$, ya que x tiene el mismo padre y la misma madre que x.

b) En $\mathbb{R}$ la relación $\leq$ es reflexiva pues $n \leq n, \forall n \in \mathbb{R}$.

Definición 6.1.2 *Se dice que una relación en A es simétrica si cuando $a\mathcal{R}b$, entonces $b\mathcal{R}a$. Es decir*

$$a\mathcal{R}b \longrightarrow b\mathcal{R}a$$

Ejemplo 6

a) La relación $\mathcal{H}$ definida en el ejemplo anterior es simétrica pues si x es hermano de y entonces y es hermano de x.

b) En el conjunto T de todos los triángulos en el plano la relación $\cong$ (congruencia) es simétrica, ya que si $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ entonces $\triangle PQR \cong \triangle ABC$.

c) En $\mathbb{R}$ la relación $\leq$ no es simétrica, puesto que se cumple $4 \leq 5$ pero no se cumple $5 \leq 4$.

Definición 6.1.3 *Una relación en A es antisimétrica si cada vez que $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$ se tiene que $a = b$, esto es:*

$$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \longrightarrow a = b$$

que es equivalente a:

$$a \neq b \longrightarrow a\not\mathcal{R}\, b \vee b\not\mathcal{R}\, a$$

Ejemplo 7

a) En $\mathbb{R}$ la relación $\leq$ es antisimétrica ya que $a \leq b \wedge b \leq a \Longrightarrow a = b$.

b) En $A = \{\triangle, \bigcirc, *\}$ la relación con gráfico $\{(\triangle, \triangle), (\bigcirc, \bigcirc), (*, *)\}$ es simétrica y antisimétrica.

Definición 6.1.4 *Una relación en A se dice transitiva si cada vez que $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ se tiene que $a\mathcal{R}c$:*

$$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \longrightarrow a\mathcal{R}c.$$

Ejemplo 8

Las siguientes relaciones son transitivas

a) La relación $\leq$ en $\mathbb{R}$.

b) La relación $\cong$ en el conjunto de triángulos en el plano.

c) La relación $\mathcal{H}$ "es hermano de" en el conjunto de seres humanos.

Definición 6.1.5 *Una relación $\mathcal{R}$ en A es de equivalencia si:*

i- $\mathcal{R}$ es reflexiva.

ii- $\mathcal{R}$ es simétrica.

iii- $\mathcal{R}$ es transitiva.

Ejemplo 9

a) En $\mathbb{Z}$ se define $\mathcal{R}$:

$$a\mathcal{R}b \iff a-b \text{ es múltiplo de } 3$$

i- $\mathcal{R}$ es reflexiva:

Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}a \iff a-a$ es múltiplo de 3.

$a-a=0=3\cdot 0$. En consecuencia $a\mathcal{R}a$. $\forall a \in \mathbb{Z}$.

ii- $\mathcal{R}$ es simétrica:

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Se tiene que $a\mathcal{R}b \iff a-b=3k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, multiplicando por -1 ambos lados de la igualdad se obtiene $b-a=3(-k)$ con $-k \in \mathbb{Z}$, esto dice que $b-a$ es múltiplo de 3 y por lo tanto $b\mathcal{R}a$.

iii- $\mathcal{R}$ es transitiva:

Sean a, b y c tales que $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ de donde se tiene que $a-b$ y $b-c$ son múltiplos de 3 lo que implica:

$\exists k_1 \in \mathbb{Z}: a-b=3k$ y $\exists k_2 \in \mathbb{Z}: b-c=3k_2$ sumando las igualdades se obtiene $a-c=3(k_1+k_2)$ como $k_1+k_2 \in \mathbb{Z}$ concluimos que $a-c$ es múltiplo de 3 y en consecuencia $a\mathcal{R}c$.

Así, finalmente se verifica que $\mathcal{R}$ es de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

Observe que $a\mathcal{R}0 \iff a-0=3k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, es decir:

$$a\mathcal{R}0 \iff a=3k \text{ para } k \in \mathbb{Z}.$$

Indicando que, para que un entero se relacione con 0 es necesario y suficiente que sea múltiplo de 3.

b) En el conjunto de seres humanos la relación $\mathcal{H}$ (es hermano de) es de equivalencia.

Si se define a es hermano de b como a y b poseen el mismo padre o la misma madre, entonces $\mathcal{H}$ no es de equivalencia. ¿Por qué?

6.2 Clases de equivalencia

Definición 6.2.1 *Dada una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en A y $a \in A$.*

Al conjunto de elementos de A que están relacionados con a se le llama clase de equivalencia de a y se denota $[a]$.

$$[a]=\{b \in A / a\mathcal{R}b\}$$

Ejemplo 10

En la relación del ejemplo 9a):

$[0]=\{x \in \mathbb{Z}/x=3k, 0\mathcal{R}x\}=\{x \in \mathbb{Z}/x=3k, k \in \mathbb{Z}\}$.

$[1]=\{x \in \mathbb{Z}/x=3k+1, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ya que $[1]=\{x \in \mathbb{Z}/1\mathcal{R}x\}=\{x \in \mathbb{Z}/x\mathcal{R}1\}=\{x \in \mathbb{Z}/x-1=3k, k \in \mathbb{Z}\}=\{x \in \mathbb{Z}/x=3k+1\}$

$[2]=\{x \in \mathbb{Z}/x=3k+2, k \in \mathbb{Z}\}$

No existen más clases porque $[3]=[0]$, $[4]=[1]$, etc.

Instituto de Investigación para el Mejoramiento de la Educación Costarricense (IIMEC)
Facultad de Educación

Proposición 6.2.1 *Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A*

$$a\mathcal{R}b \iff [a] = [b]$$

Prueba *: Ejercicio*

Proposición 6.2.2 *Las clases de equivalencia definidas por una relación en A forman una partición del conjunto A.*

Demostración

Hay que mostrar

i- La unión de las clases contiene al conjunto.

ii- Dos clases diferentes no se intersecan, i.e, $[a] \neq [x] \Longrightarrow [a] \cap [x] = \emptyset$

Para mostrar (i-) basta observar que $A \subseteq \bigcup_{a \in A} [a]$.

Para (ii-) se mostrará la contrapositiva $[a] \cap [x] \neq \emptyset \Longrightarrow [a] = [x]$.

Sea $b \in [a]$ entonces, $a\mathcal{R}b$ y por simetría $b\mathcal{R}a$. (1)

Como $[a] \cap [x] \neq \emptyset$ se tiene que $\exists y \in [a]$ y $y \in [x]$ y por lo tanto $a\mathcal{R}y$ y $x\mathcal{R}y$ (2)

de (1) y (2) se obtiene $b\mathcal{R}y$, esto es $y\mathcal{R}b$ (3)

de (2) y (3) se tiene $x\mathcal{R}b$ lo que dice que $b \in [x]$.

$\therefore [a] \subseteq [x]$ igualmente se demuestra que $[x] \subseteq [a]$.

6.3 Relaciones de orden

Definición 6.3.1 *Se dice que una relación $\mathcal{R}$ en A es de orden si*

i- $\mathcal{R}$ es reflexiva.

ii- $\mathcal{R}$ es antisimétrica.

iii- $\mathcal{R}$ es transitiva.

Ejemplo 11

a) La relación $\leq$ en $\mathbb{R}$ es de orden.

b) Si E es un conjunto, la relación $\subseteq$ es de orden en $\mathcal{P}(E)$, puesto que en teoría de conjuntos se mostró que

i- $A \subseteq A \quad \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

ii- Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$.

iii- Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

Se obtiene que $\subseteq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Por lo tanto es una relación de orden en $\mathcal{P}(E)$.

6.4 Orden total y orden parcial

Definición 6.4.1 *En un conjunto E una relación de orden $\mathcal{R}$ es total si*

$$\forall x, y \in E: x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$$

De lo contrario la relación es de orden parcial.

Para que la relación de orden sea total dos elementos cualesquiera del conjunto siempre deben de estar relacionados, cumpliéndose al menos una de las proposiciones $x\mathcal{R}y$, $y\mathcal{R}x$.

Ejemplo 12

a) En $\mathbb{R}$, $\leq$ es una relación de orden total, ya que para $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple $x \leq y$ o $y \leq x$.

Por esta razón, dados cualesquiera n números reales siempre es posible ordenarlos a todos, desde el menor hasta el mayor. Mas aún, esta propiedad junto con la continuidad de $\mathbb{R}$ permite representar los números reales en una recta.

b) Si $E = \{a, b, c\}$ se sabe que $\subseteq$ es un orden en $\mathcal{P}(E)$. Sin embargo ocurre que $\{a\} \not\subseteq \{b\}$ y $\{b\} \not\subseteq \{a\}$. Esto es, $\{a\}$ no se relaciona con $\{b\}$ y $\{b\}$ no se relaciona con $\{a\}$. Indicando que este orden es parcial en $\mathcal{P}(E)$.

No obstante algunos subconjuntos propios de $\mathcal{P}(E)$ se pueden ordenar totalmente.

$\emptyset \subseteq \{a\} \subseteq \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$

$\emptyset \subseteq \{b\} \subseteq \{b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$.

Por esto se dice que $\mathcal{P}(E)$ es parcialmente ordenado por la relación $\subseteq$.

6.5 Ejercicios

1. Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{a,b\}$.
   $\mathcal{R} = \{A, B, R\}$, $\mathcal{T} = (A, B, T)$ con

$$R = \{(1,a),(1,b),(2,b),(2,b),(3,b)\}$$

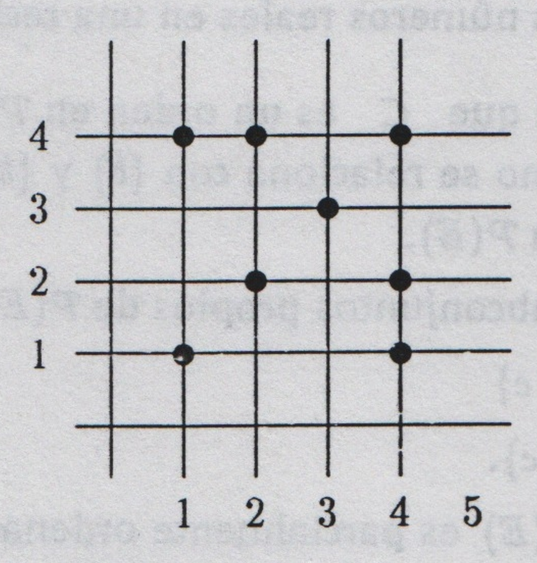
$$T = \{(x,a)/x \in A \wedge x \text{ es par}\} \cup \{(x,b)/x \in A \wedge x \text{ es impar}\}$$

   Determinar

   a) Dom$\mathcal{R}$, Amb$\mathcal{R}$, R^{-1}

   b) Dom$\mathcal{T}$, Amb$\mathcal{T}$, T^{-1}

2. En $E = \{1,2,3,4\}$ se define la relación $\mathcal{R}$ con gráfico R en el dibujo



   a) ¿Es $\mathcal{R}$ reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva?.

   b) Determinar R, R^{-1}, $R^{-1} \circ R$

3. En el conjunto $E = \{k,l,m,n\}$. Construir

   a) Una relación reflexiva y antisimétrica.

   b) Una relación simétrica.

   c) Una relación transitiva.

4. En $\mathbb{N}$ definimos la relación

$$n\mathcal{R}m \iff 6n + 4m = 24$$

   a) Determinar el dominio y el ámbito de $\mathcal{R}$.

   b) Determinar el gráfico de $\mathcal{R}$.

   c) Dar R^{-1}.

   d) Calcular $R^{-1} \circ R$.

5. Hacer un dibujo en el plano cartesiano de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

   a) $R = \{(x,y)/x + y = 5\}$

   b) $R = \{(x,y)/|x + y| = 3\}$

c) $R = \{(x,y)/|x| + |y| = 2 \vee |x| - |y| = 2\}$

d) $R = \{(x,y)/x > y\}$

6. En el conjunto $\mathbb{Z}$. Determinar cuáles de las siguientes relaciones son de orden. Cuáles son de orden parcial o total.

a) $(x,y) \in R \iff x > y$.

b) $(x,y) \in R \iff x = y$.

c) $(x,y) \in R \iff x/y$.

d) $(x,y) \in R \iff x + 5 \geq y$.

7. En el conjunto $\mathbb{R}$ cuales de las siguientes relaciones son de equivalencia. Caracterizar las clases de equivalencia.

a) $(x,y) \in R \iff |x| = |y|$.

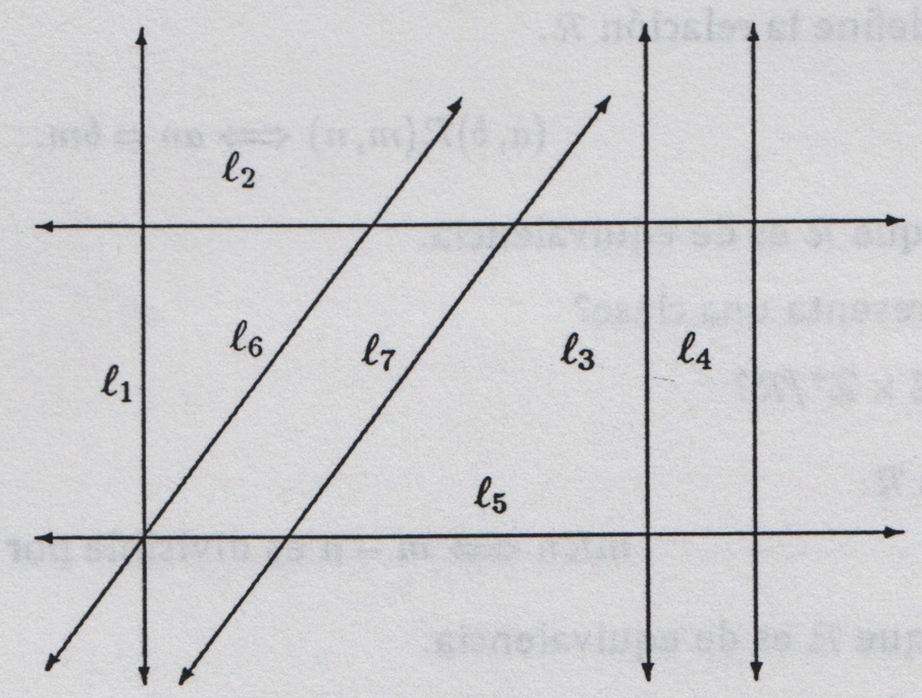
b) $(x,y) \in R \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

c) $(x,y) \in R \iff x \cdot y \leq 0$.

d) $(x,y) \in R \iff x - y \in \mathbb{Q}$.

8. Sea $X = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7\}$ definimos en X la relación $\mathcal{R}$.

$$l_i \mathcal{R} l_j \iff l_i \text{ es paralela a } l_j$$



a) ¿Cuál es el dominio y el ámbito de $\mathcal{R}$?

b) Dé el gráfico de $\mathcal{R}$.

c) Muestre que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

d) Dé las clases de equivalencia.

9. Sea $X = \{x/x$ es una palabra de 4 letras del idioma español$\}$. En X definimos la relación:

$$x \mathcal{R} y \iff x, y \text{ tienen el mismo número y las mismas vocales.}$$

a) ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de eqivalencia?

b) Si $\mathcal{R}$ es de equivalencia, dar 3 elementos de la clase [alto], y de la clase [risa].

10. En $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ se define la relación $(a,b)\mathcal{R}(m,n) \iff am > 0 \wedge bn > 0$.

a) ¿Cuál es el dominio de $\mathcal{R}$?

b) Muestre que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

c) ¿Qué es $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*/\mathcal{R}$?

11. $M = \{l/l$ es una recta de ecuación $y = mx\}$. En M se define

$$l_1 \mathcal{R} l_2 \iff m_1 \geq m_2.$$

a) ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de orden?

b) ¿Es $\mathcal{R}$ un orden total?

12. En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos la relación:

$$(a,b)\mathcal{O}(c,d) \iff a \leq c \wedge b \leq d.$$

a) Pruebe que $\mathcal{O}$ es una relación de orden.

b) ¿Es un orden total? ¿Por qué?

13. Si $\mathcal{R}$ es una relación de orden total entonces $\mathcal{R}^{-1}$ es de orden total.

14. En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ se define la relación $\mathcal{R}$.

$$(a,b)\mathcal{R}(m,n) \iff an = bm.$$

a) Muestre que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

b) ¿Qué representa una clase?

c) ¿Qué es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\mathcal{R}$?

15. En $\mathbb{Z}$ se define $\mathcal{R}$:

$$m\mathcal{R}n \iff m - n \text{ es divisible por } 5.$$

a) Muestre que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

b) ¿Cuántas clases existen? ¿Cuáles son?

16. Sea A un conjunto y $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ dos relaciones en A con gráficos R y S respectivamente. Se definen las relaciones $\mathcal{I}$ y $\mathcal{U}$ en A como sigue

$a\mathcal{I}b \iff (a,b) \in R \cap S$

$a\mathcal{U}b \iff (a,b) \in R \cup S$

a) Mostrar que si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son de equivalencia entonces, $\mathcal{I}$ también lo es.

b) Caracterizar las clases de equivalencia de $\mathcal{I}$ en términos de las clases de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$.

c) ¿Es $\mathcal{U}$ una relación de equivalencia?

17. En $\mathbb{Q}$ se define: $x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

    (a) Mostrar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

    (b) Caracterizar $[0]$, $[\frac{1}{2}]$, $[-\frac{5}{3}]$.

    (c) ¿Cuántos elementos posee $[\frac{1}{2}]$?

18. En $\mathbb{R}$ se define: $x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Q}$.

    (a) Mostrar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

    (b) Caracterizar $[0]$, $[\frac{1}{2}]$, $[\sqrt{2}]$, $[\pi]$.

    (c) ¿Cuántas elementos posee $[\sqrt{2}]$?

19. En $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ se tiene una relación $m|n$ (m divide a n).

    (a) Mostrar que $|$ es de orden en $\mathbb{N}$.

    (b) ¿Es total?

    (c) ¿Qué cambiaría si la relación $|$ se define en $\mathbb{Z}$?

20. Sea A un conjunto y $M \subset A$, $M \neq \emptyset$, $M \neq A$.
    En $\mathcal{P}(A)$ se define la relación $\mathcal{R}$ por

$$X\mathcal{R}Y \iff X \bigcap M = Y \bigcap M.$$

    (a) Mostrar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

    (b) Mostrar que $X \in [\emptyset] \iff X \subset \bigcap M$.

    (c) Mostrar que $X \in [A] \iff X \subseteq M$.

    (d) Si $A = \{a, b, c\}$ y $M = \{a\}$. Calcule $[\{a, b\}]$, $[\{b, c\}]$.

Capítulo 7

Funciones

Las funciones son un tipo de relaciones especiales entre conjuntos, en las cuales cada elemento del dominio determina un solo elemento con quien relacionarse.

En la vida cotidiana ellas expresan la noción de correspondencia, por ejemplo:

- A cada estudiante le corresponde una nota del curso.
- A cada palabra le corresponde un único lugar en un diccionario.
- A cada instante x le corresponde una velocidad v cuando hay un objeto en movimiento.

En lenguaje preciso se tiene:

Definición 7.0.1 *Una función de A en B es una relación $f = (A, B, G)$ en la cual a cada elemento de A se asocia un único elemento de B. En otras palabras una relación binaria es una función si*

$$\forall x \in A \; \exists! y \in B \text{ tal que } x f y.$$

Note que, cuando f es función el conjunto de salida A coincide con el dominio de f, es decir, $A = Dom\ f$.

El conjunto de llegada B recibe el nombre de codominio y $Am f \subseteq B$.

Como para cada $x \in A$ solo hay un $y \in B$ tal que $x f y$, se dice que y es la imagen de x por la función f y se acostumbra denotar por $y = f(x)$. De x se dice que es una preimagen de y.

También es usual llamar a x la variable independiente y a y la variable dependiente. Se estudiaran las funciones con ambas variables en el conjunto de los números reales es decir, funciones reales de variable real y generalmente se definen a través de una expresión algebraica.

Ejemplo 1

a) Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$.

Observe que 4 es la imagen de -2 y de 2, -5 (y cualquier número negativo) no tiene preimagen.

b) $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

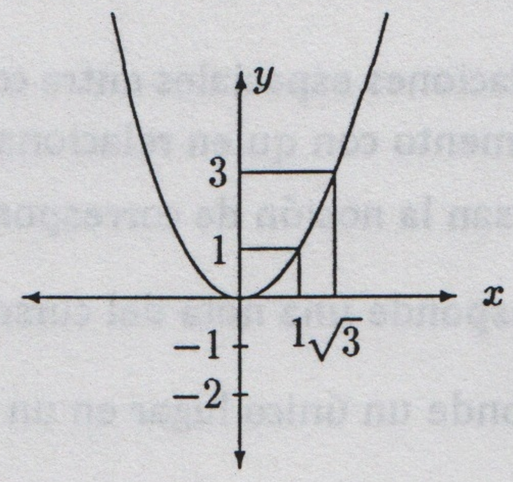
En este caso es necesario excluir a $x = 0$ del dominio de f puesto que $x = 0$ no tendría imagen.

c) f: $[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow \sqrt{x}$

Ahora Dom $f = [0,+\infty[$ porque $\sqrt{x}$ no existe para los números negativos. El gráfico de f es el conjunto

$$G = \{(x,y) \in [0,+\infty] \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x}\} = \{(x,\sqrt{x}) / x \geq 0\}$$

Definición 7.0.2 *Sea $f: A \longrightarrow B$ una función. Si $E \subseteq A$ y $F \subseteq B$ el conjunto $f(E) = \{y \in B / y = f(x)$ para algún $x \in E\}$ se llama la imagen del conjunto E.*
Y $f^{-1}(F) = \{x \in A / f(x) \in F\}$ se llama conjunto pre-imagen de F.



Ejemplo 2

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$
Amb $f = f(\mathbb{R}) = [0,+\infty[$
$f([1,\sqrt{3}]) = [1,3]$
$f^{-1}(]-2,-1[) = \emptyset$
$f^{-1}(]-2,2[) =]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$

Proposición 7.0.1 *Si $f: A \longrightarrow B$ es una función $E, I \subseteq A$ y $F, H \subseteq B$ entonces:*

a) $f(E \cup I) = f(E) \cup f(I)$.

b) $f(E \cap I) \subseteq f(E) \cap f(I)$.

c) $f^{-1}(F \cup H) = f^{-1}(F) \cup f^{-1}(H)$.

d) $f^{-1}(F \cap H) = f^{-1}(F) \cap f^{-1}(H)$.

Prueba Se demuestran aquí las proposiciones b) y c).

b) Sea $y \in f(E \cap I) \Longrightarrow \exists x \in E \cap I$ tal que $y = f(x)$
$\Longrightarrow x \in E$ con $y = f(x) \wedge x \in I$ con $y = f(x)$
$\Longrightarrow y \in f(E) \wedge y \in f(I) \Longrightarrow y \in f(E) \cap f(I)$.
Para mostrar que no se cumple igualdad basta tomar la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $y = x^2$ del ejemplo 2a .
$E = [-\sqrt{3},-1]$, $I = [1,\sqrt{3}]$, entonces $f([-\sqrt{3},-1] \cap [1,\sqrt{3}]) = f(\emptyset) = \emptyset$

Sin embargo se tiene: $f([-\sqrt{3},-1]) \cap f([1,\sqrt{3}]) = [1,3] \cap [1,3] = [1,3]$

c) $f^{-1}(F \cup H) = f^{-1}(F) \cup f^{-1}(H)$.

Sea $x \in f^{-1}(F \cup H) \iff f(x) \in F \cup H \iff f(x) \in F \vee f(x) \in H$

$\iff x \in f^{-1}(F) \vee x \in f^{-1}(H) \iff x \in f^{-1}(F) \cup f^{-1}(H)$.

7.1 Operaciones con funciones

Definición 7.1.1 *Sean A_1 y $A_2 \subseteq \mathbb{R}$, $f : A_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Se denota con $f+g$ una nueva función que asocia a cada $x \in A_1 \cap A_2$ con el elemento $f(x)+g(x)$, es decir:*

$f+g : A_1 \cap A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

De la misma forma se define:

$f-g : A_1 \cap A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$

$f \cdot g : A_1 \cap A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$\frac{f}{g} : A_1 \cap A_2 - \{x / g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Composición de funciones.

Recuerde que se definió la composición de dos relaciones, $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ como la nueva relación $g \circ f$ de manera que

$$(x,z) \in G_{g \circ f} \iff \exists y \in B \text{ tal que } (x,y) \in G_f \text{ y } (y,z) \in G_g$$

lo que es equivalente a

$$x(g \circ f)z \iff \exists y \in B \text{ tal que } xfy \text{ y } ygz$$

que en la notación adoptada para las funciones se escribe:

$z = (g \circ f)(x) \iff \exists y \in B$ tal que $y = f(x)$ y $z = g(y)$

$\iff \exists y \in B$ tal que $z = g(f(x))$.

En resumen se tiene:

Definición 7.1.2 *Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$. Se llama composición de f y g a la función $(g \circ f) : A \longrightarrow C$ donde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

El dominio para $g \circ f$ es $D_{g \circ f} = \{x \in A / f(x) \in B\}$

Ejemplo 3

Sean:

$$f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$
$$h: [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \sqrt{x-1}$$
$$l: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad l(x) = x^2 - 2$$
$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x + \sqrt{2}$$

Entonces:

a) $f+g:\mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}\,;\,(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{x}+x+\sqrt{2}.$

b) $\frac{f}{l}:\mathbb{R}-\{0,-\sqrt{2},\sqrt{2}\}\longrightarrow\mathbb{R}\,;\,\frac{f}{l}=\frac{f(x)}{l(x)}=\frac{1}{x(x^2-2)}.$

c) $\frac{l}{g}:\mathbb{R}-\{-\sqrt{2}\}\longrightarrow\mathbb{R}\,;\,\frac{l}{g}(x)=\frac{x^2-2}{x+\sqrt{2}}=x-\sqrt{2}.$

d) $D_{foh}=\{x\in D_h/h(x)\in D_f\}=\{x\in[1,+\infty[/\sqrt{x-1}\neq 0\}=]1,+\infty[.$
$(f\circ h)(x)=f(h(x))=f(\sqrt{x-1})=\frac{1}{\sqrt{x-1}}.$

e) $D_{hol}=\{x\in D_l/l(x)\in D_h\}=\{x\in\mathbb{R}/x^2-2\geq 1\}$
$\{x\in\mathbb{R}/x^2\geq 3\}=\{x\in\mathbb{R}/|x|\geq\sqrt{3}\}=]-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty[.$

$(h\circ l)(x)=h\big(l(x)\big)=h\big(x^2-2\big)=\sqrt{x^2-2-1}=\sqrt{x^2-3}.$

7.2 Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Definición 7.2.1 *Una función es inyectiva si cada elemento del codominio posee una o no posee preimagen, esto es:*

$$f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2 \quad o\ bien\ \ x_1\neq x_2\Longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2).$$

Definición 7.2.2 *Se dice que f es sobreyectiva si cada elemento del codominio tiene una o mas preimágenes, en notación formal:*

$$f:A\longrightarrow B\ es\ sobreyectiva\iff\forall y\in B\ \exists\, x\in A\ tal\ que\ f(x)=y.$$

Definición 7.2.3 *A una función en la cual cada elemento del codominio posee una y solo una preimagen se le llama biyectiva. En este caso la función resulta inyectiva y sobreyectiva a la vez:*

$$f:A\longrightarrow B\ es\ biyectiva\iff\forall y\in B\ \exists!x\in A\ tal\ que\ f(x)=y.$$

Ejemplo 4

a) La función $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2}{3}x-4$ es inyectiva y sobreyectiva.

Prueba

f es inyectiva:

Hay que mostrar $f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$

Sean $x_1,x_2\in D_g$: $g(x_1)=g(x_2)\Longrightarrow\frac{2}{3}x_1-4=\frac{2}{3}x_2-4\Longrightarrow\frac{2}{3}x_1=\frac{2}{3}x_2\Longrightarrow x_1=x_2.$

f es sobreyectiva:

Hay que mostrar $\forall y\in\mathbb{R}\ \ \exists\, x\in\mathbb{R}$ tal que $g(x)=y$.

Sea $y\in\mathbb{R}$, si y fuera imagen de algún x, debe cumplirse que:

$\frac{2}{3}x-4=y\Longrightarrow\frac{2}{3}x=y+4\Longrightarrow x=\frac{3}{2}y+6$

Observe que para cualquier $y\in\mathbb{R}$ siempre existe el número $\frac{3}{2}y+6$ que hace el rol de preimagen de y.

b) La función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^2$ no es inyectiva ni sobreyectiva.

Prueba

Si fuera sobreyectiva, debe cumplir: $\forall y\in\mathbb{R}\ \ \exists x$ tal que $y=x^2$, pero es conocido que $y=x^2\geq 0\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}$, lo que impide que y sea negativa. Es decir, solo para $y\geq 0$ se cumple $y=x^2$.

Para mostrar que una función no es sobreyectiva, basta encontrar un valor de y del codominio que no tenga preimagen. Para el caso de $f(x)=x^2$, es suficiente por ejemplo, hacer notar que -5 no es imagen de ningún x del dominio, es decir $-5\neq x^2\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

Por otro lado se tiene que f no es inyectiva ya que $f(-2)=4=f(2)$ y $-2\neq 2$.

7.3 Función Inversa

Toda relación posee inversa pero no toda relación es función. El concepto de función inversa combina estas proposiciones:

Definición 7.3.1 *Si f es una función, se dice que es invertible si su relación inversa es una función. La inversa se denota por f^{-1}.*

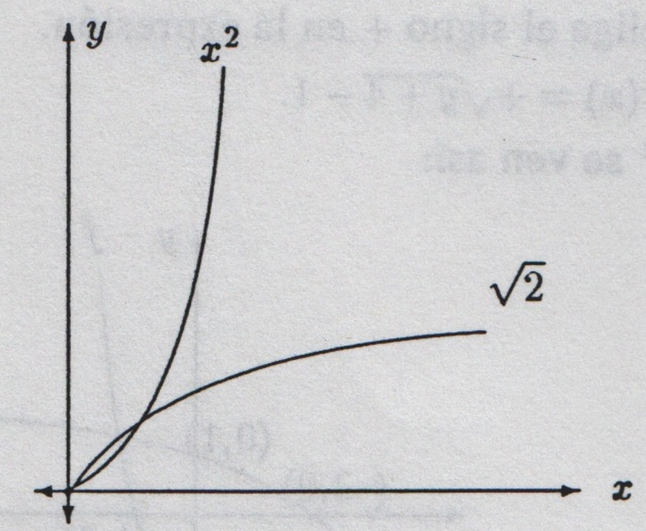
Ejemplo 5

a) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\qquad G_f=\{(x,2x):x\in\mathbb{R}\}$
$f^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\qquad G_{f^{-1}}=\{(2x,x):x\in\mathbb{R}\}$

b) $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\qquad G_g=\{(x,x^2):x\in\mathbb{R}\}$
$g^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\qquad G_{g^{-1}}=\{(x^2,x):x\in\mathbb{R}\}$

g no es invertible puesto que g^{-1} no es función. No obstante puede redefinirse g en un dominio y codominio para hacer que g^{-1} sea función, así se tiene:

$g:[0,+\infty[\longrightarrow[0,+\infty[,\ \ g(x)=x^2$ es una función invertible. Su inversa es $g^{-1}(x)=\sqrt{x}$.



Proposición 7.3.1 *$f:A\longrightarrow B$ es una función invertible si y solo si f es biyectiva.*

Prueba

f^{-1} *es función* $\Longleftrightarrow \forall b\in B\exists!\, a\in A\,[(b,a)\in G_{f^{-1}}]$

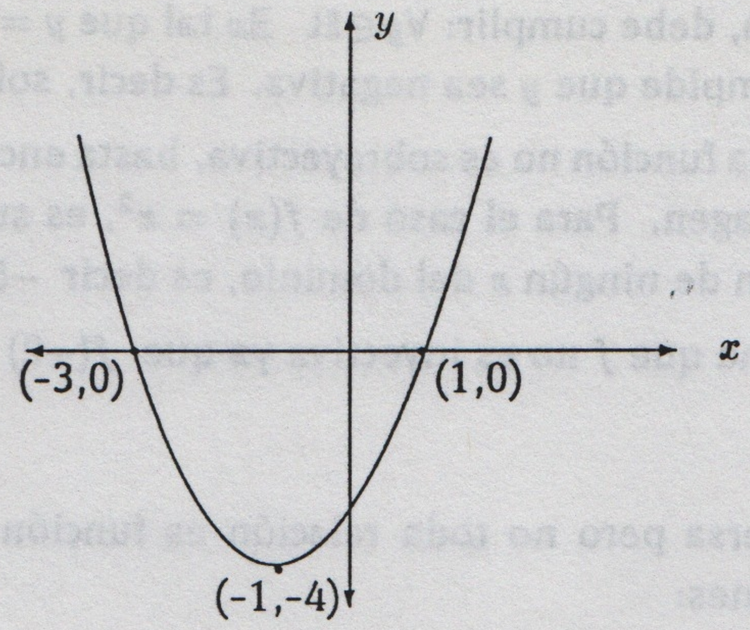
$\Longleftrightarrow \forall b\in B\exists! a\in A\,[(a,b)\in G_f]$

$\Longleftrightarrow \forall b\in B\exists! a\in A\,[f(a)=b]\Longleftrightarrow f$ *es biyectiva.*

Ejemplo 7

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Esta función posee ceros en $x = 1$ y $x = -3$. Su gráfico es un parábola con vértice en $(-1, -4)$:



Es fácil verificar que f no es biyectiva, por lo que f no posee inversa. Redifinimos $f : [-1, +\infty[\longrightarrow [-4, +\infty[$ se tiene ahora una función biyectiva (verifíquelo) y por lo tanto debe de existir $f^{-1} : [-4, +\infty[\longrightarrow [-1, +\infty[$. Si $y = f(x)$ entonces $f^{-1}(y) = x$, es decir se debe encontrar x en función de y.

$y = f(x) \iff y = x^2 + 2x - 3 \iff y = x^2 + 2x + 1 - 3 - 1 \iff y = (x+1)^2 - 4 \iff$

$y + 4 = (x+1)^2 \iff \sqrt{y+4} = |x+1| \iff \pm\sqrt{y+4} = x + 1 \iff x = \pm\sqrt{y+4} - 1.$

¡Hay dos inversas!.

Observe que se escogió como dominio de f el intervalo $[-1, +\infty[$ y como codominio el intervalo $[-4, +\infty[$. Si el punto $(0, -3) \in G_f$.

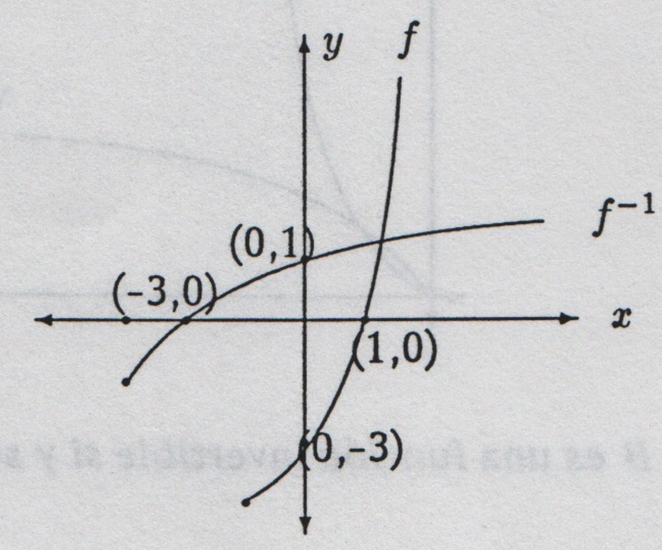
Al sustituir en la ecuación $x = \pm\sqrt{y+4} - 1$ el punto $x = 0$, $y = -3$ debe verificarse la igualdad:

$0 = \pm\sqrt{-3+4} - 1 \iff 0 = \pm 1 - 1.$

Lo que sucede solo si se elige el signo + en la expresión.

Se tiene entonces: $f^{-1}(x) = +\sqrt{y+4} - 1$.

Los gráficos de f y f^{-1} se ven así:



Proposición 7.3.2 *Si $f: A \longrightarrow B$ es invertible entonces*

$(f^{-1} \circ f)(x) = x \qquad \forall x \in A$

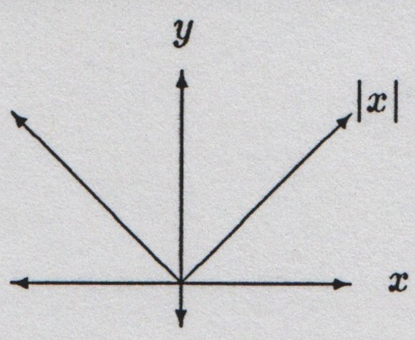
$(f \circ f^{-1})(x) = x \qquad \forall x \in B.$

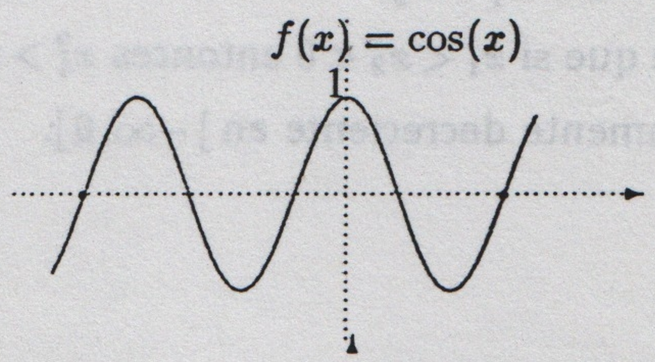
7.4 Funciones pares e impares

Definición 7.4.1 *Sea* $a \in \mathbb{R}^+$, $f:[-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ *función, se dice par si* $f(-x) = f(x)\ \forall x \in [-a,a]$ *y se llama impar si* $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in [-a,a]$.

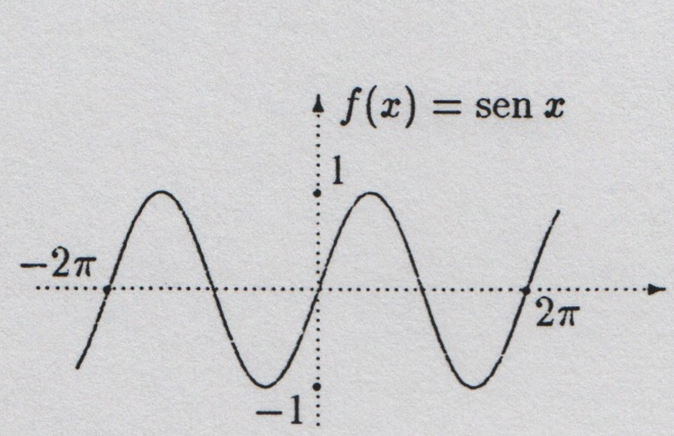
Ejemplo 7

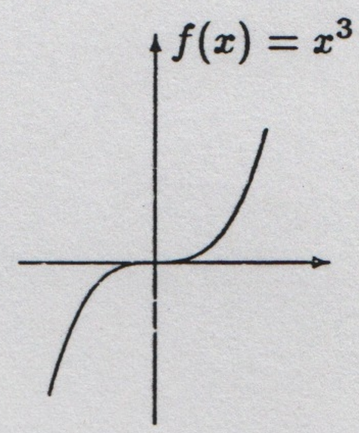
a) Las funciones definidas en $\mathbb{R}$, x^2, $|x|$, $\cos x$, x^4 son pares.





b) Las funciones x^3, x, sen x, son impares en $\mathbb{R}$.





c) La función $f(x) = \dfrac{x^2}{1+|x|}$ es par ya que $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{1+|-x|} = \dfrac{x^2}{1+|x|} = f(x)$.

7.5 Funciones monótonas

Definición 7.5.1 *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$ *y* $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función. Si para cualesquiera* $x_1, x_2 \in A$ *se cumple*

$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ *se dice que* f *es creciente.*

$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow f(x_1 < f(x_2)$ *se dice que* f *es estrictamente creciente.*

$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ *se dice que* f *es decreciente.*

$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ *se dice que* f *es estrictamente decreciente.*

Ejemplo 8

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x^2$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty[$ y estrictamente decreciente en $]-\infty, 0]$.

Prueba

Sean $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$ y $x_1 < x_2$.

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow x_1^2 < x_2 \cdot x_1 \quad (\text{multiplicando por } x_1 > 0) \tag{1}$$

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow x_1 \cdot x_2 < x_2^2 \quad (\text{multiplicando por } x_2 > 0) \tag{2}$$

de (1) y (2) por transitividad de la relación $<$ se tiene $x_1^2 < x_2^2 \Longleftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

$\therefore f$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty[$.

Ahora, considere $x_1, x_2 \in]-\infty, 0]$.

$$x_1 < x_2 \iff x_1^2 > x_2 \cdot x_1 \text{ (ya que } x_1 < 0) \tag{3}$$

$$x_1 < x_2 \iff x_2 \Longrightarrow x_2 \cdot x_1 > x_2^2 \ (x_2 < 0) \tag{4}$$

de (3) y (4) se tiene $x_1^2 > x_2^2$.

Obteniéndose que si $x_1 < x_2 < 0$ entonces $x_1^2 > x_2^2$.

$\therefore f$ es estrictamente decreciente en $]-\infty, 0]$.

Ejercicios.

1. Determine el dominio para:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-8}}$ b) $h(x) = \sqrt{3-|x|}$.

c) $l(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ d) $t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}}$

e) $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+10x+25}}$ f) $s(x) = \dfrac{1}{x-|x|}$

g) $h(x) = \dfrac{x}{x^2-5x+6}$

2. Sean

$f(x) = 3x-5,\ x \in \mathbb{R}$
$g(x) = x^2+5,\ x \in \mathbb{R}$
$h(x) = \sqrt{x},\ x \in [0,+\infty[$
Calcule:

$f([-3,0])$ $g([0,8])$ $f^{-1}([0,5])$ $g([0,5])$
$g([-5,5])$ $h^{-1}([0,2])$ $h([-1,1])$ $h([-3,0])$

3. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x-2$.

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = x^2+5.$

$h : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}.$
$p : \mathbb{R} - \{-2,2\} \longrightarrow \mathbb{R},\ p(x) = \dfrac{1}{x^2-4}.$

Calcule el dominio y las funciones siguientes:

a) $f+g$ b) $\frac{f}{g}$ c) $h \cdot p$
d) $p \circ h$ e) $g \circ p$ f) $p \circ g$
g) $h \circ f$ h) $p \circ h \circ f$ i) $f \circ g \circ h$

4. Si $f :]-\infty,0[\longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x}$.

(a) Muestre que f es inyectiva.

(b) Muestre que f es sobreyectiva.

(c) Encuentre la inversa de f.

5. Encuentra la inversa de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = 2x+7$.
b) $f_2(x) = \sqrt{x}; x > 0$.
c) $f_3(x) = \frac{1}{x}; x \neq 0$.

d) $f_4(x) = \frac{x+1}{x+2}; x \in \mathbb{R} - \{-2\}$.
e) $f_5(x) = 1 - \frac{2x}{x+1}; x \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

6. Si $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{3}{5}x - 2$,
   (a) Muestre que h es biyectiva.
   (b) Encuentre la inversa de h.

7. Cuales de las siguientes funciones son inyectivas en su dominio máximo.

a) $f(x) = 3x - 10$
b) $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$
c) $h(x) = |x - 7|$
d) $l(x) = x^3$
e) $q(x) = \sqrt{x}$

8. Exprese las siguientes funciones dadas como composición de dos o mas funciones.

a) $f(x) = x^2 + 1$
b) $h(x) = (1 + 2x)^2$
c) $t(x) = \left(5x - \frac{1}{x}\right)^2$
d) $l(x) = \sqrt{(1 + x^2)^5}$
e) $z(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}$

9. Grafique.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$
b) $h(x) = -2x + \frac{5}{2}$
c) $p(x) = 8 - x^2$
d) $l(x) = x^2 - 2x$
e) $m(x) = |x - 2|$
f) $t(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \frac{x}{2} + 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$
g) $r(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$

10. Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -5x^2 + 6$.
    (a) Trazar la gráfica de f, indicar ceros y vértice.
    (b) Mostrar que f no es sobreyectiva ni inyectiva.
    (c) Redefinir f de manera que f^{-1} exista y calcular f^{-1}.

11. Para las siguientes funciones redefina (reduzca) el dominio y el ambito para que sean biyectivas y calcule la inversa.
    (a) $f(x) = x^2 - 5$
    (b) $g(x) = x^2 - 4x - 1$

12. Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{5}{x+1}$.
    Muestre que f es estrictamente decreciente.

13. Sea $g :]-5,5[\longrightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = \frac{x}{5-|x|}$

    (a) Mostrar que g es impar.

    (b) Mostrar que g es creciente en $]0,5[$.

    (c) Mostrar que en $]-5,0[$ g es creciente.

14. Muestre que la composición de dos funciones impares es impar.

15. Muestre que el producto de dos funciones impares es par.

16. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, A, B \subset \mathbb{R}$. Muestre que si f es inyectiva y $A \cap B = \emptyset$ entonces $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

17. Si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g \circ f$ es biyectiva. Muestre que f es imyectiva y g es sobreyectiva.

18. (a) Grafique la función $f(x) = x^2 - x - 12$.

    (b) Grafique la función $g(x) = |x^2 - x - 12|$.

    (c) En que intervalo(s) la función $g(x)$ es mayor que la función $h(x) = 4x + 12$.

19. (a) Grafique las funciones $f(x) = \frac{1}{|x|}$ y $g(x) = 9 - x^2$.

    (b) Señalar la región de puntos (x, y) en el plano que satisfacen simultaneamente las siguientes condiciones: $y \geq \frac{1}{|x|}$ y $y \leq 9 - x^2$.

20. (a) Grafique $f(x) = |x - 3|$ y $g(x) = 2 - |x - 1|$.

    (b) Resolver $|x - 3| \leq 2 - |x - 1|$.

21. La inversa de la función $a^x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,]0, +\infty[$, $a > 0$, $a \neq 1$ es $\log_a x :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.
    Encontrar el dominio y la inversa de las siguientes funciones:

    (a) $y = \ln(2^{2x} + 5)$.

    (b) $y = a^{2x-1}$, $a > 1$.

    (c) $y = \sqrt{e^x + 1}$.

    (d) $y = \log(x + 5) - \log(x + 4)$.

Instituto de Investigación
para el Mejoramiento de la
Educación Costarricense (IIMEC)
Facultad de Educación

BIBLIOGRAFÍA

- Ross, K ; Wright : Matemáticas Discretas. 2° edición , Prentice Hall.
- Colman, B. ; Ross, S. ; Busby, R. ; Estructuras de Matemáticas Discretas para Computación. 3° Edición, Prentice Hall.
- Jonson baugh, R. ; Matemáticas Discretas, Grupo Editorial Iberamerica.
- Duarte, A. ; Cambronero. S. : Conjuntos y Relaciones Binarias. Escuela de Matemática. U.C.R.
- Copi, I. : Lógica Simbólica, Cie Editorial Continental S.A., de CV. 3° Edición