



Universidad de Costa Rica
Facultad de Educación
Instituto de Investigación en Educación

FACULTAD DE EDUCACIÓN
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN
(INIE)

INFORME FINAL

**C1025 DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO EN PROCESOS DE
FORMACIÓN CONTINUA CON DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA
UTILIZANDO UNA PERSPECTIVA SOCIOCULTURAL**

ANA PATRICIA MAROTO VARGAS

¹Fecha de presentación informe al INIE

31 enero 2023



I. Información General

Información Administrativa

Código del proyecto: C1025

Nombre del proyecto: Desarrollo del pensamiento numérico en proceso de formación continua con docentes de educación primaria utilizando una perspectiva sociocultural

Programa de investigación del INIE al que pertenece su proyecto: 724-B8-906 Programa Mediación Pedagógica y Curricular

Unidad Académica base donde está nombrado el personal investigativo: Sede de Occidente

Otras unidades colaboradoras: Ninguna

Unidad de adscripción: INIE

Vigencia original del proyecto: Del 01 de enero de 2021 al 31 de diciembre de 2022

Investigadora principal: Ana Patricia Maroto Vargas

Carga: 1/4 TC

Período: 2021

Otro personal investigador asociado y colaborado: No hay

Características de interdisciplinariedad: No hay.

Resumen (mínimo 200 palabras, máximo 500 sobre el proyecto).

Este proyecto tenía por objetivo analizar el proceso de aprendizaje de un grupo de docentes en servicio en relación con alguno de los temas de educación primaria que se relacionan con pensamiento numérico. Se trabajó el tema de operaciones básicas con números naturales con un grupo de docentes en servicio a través de sesiones sincrónicas semanales. El curso impartido fue dividido en tres partes: al inicio se trabajaron estrategias para realizar cálculos con las operaciones básicas con números naturales que promovieran el cálculo mental y la comprensión de las operaciones y los números naturales de una manera más profunda, sin utilización de algoritmos. También se analizó el diseño de problemas sobre este tema. La segunda parte del curso se centró en el análisis del pensamiento matemático del



estudiantado al resolver problemas que involucran operaciones básicas con números naturales. Finalmente, se trabajaron estrategias para promover más participación del estudiantado en la clase, a través de la promoción del discurso matemático al explicar la solución dada a los problemas propuestos.

A través de esta intervención se hizo la recolección de la información que permitió realizar la recolección de información a través de la grabación de las videollamadas realizadas. Se grabaron las 32 sesiones de trabajo para un total de 54 horas.

Descriptor (los que planteó en la propuesta de investigación)

- 15847 - Educación de adultos
- 15875 - Enseñanza primaria
- 15988 - Enseñanza de las matemáticas
- 16026 - Formación de docentes
- 16030 - Formación de docentes de primaria
- 16061 - Docente de escuela primaria
- 16152 - Calidad de la educación

II. Antecedentes

Introducción

A continuación se presentan los antecedentes más importantes de este proyecto de investigación. Estos están divididos en dos secciones. La primera se titula *Sistema Educativo Costarricense* e incluye los apartados: programa de estudios oficial vigente del Ministerio de Educación Pública, la realidad de aula y la formación continua de docentes en nuestro país. La segunda parte se titula *Investigación previa relacionada con el diseño de procesos de formación continua y aprendizaje del docente*, que incluye dos partes: procesos de formación continua y perspectiva sociocultural.

I. Sistema Educativo Costarricense

1. Programa de estudios oficial vigente del Ministerio de Educación



A partir del año 2012, el Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012) ha estado implementando un nuevo currículo para la enseñanza de la Matemática, el cual establece la resolución de problemas como enfoque principal del currículo. Con esta propuesta se pretende que el estudiantado desarrolle habilidades que le permitan utilizar los conocimientos matemáticos para enfrentar la vida cotidiana, más que la memorización de contenidos matemáticos a repetir en un examen. Como parte de este nuevo enfoque, el currículo fue diseñado de manera vertical, incluyendo cinco áreas matemáticas, a saber, Geometría, Relaciones y Álgebra, Números, Medidas y Estadística y Probabilidad, las cuales están incluidas en todos los niveles del sistema educativo, desde primer grado y hasta la finalización de la secundaria. La propuesta también incorpora cinco procesos matemáticos que deben ser fomentados durante las lecciones 1) razonar y argumentar, 2) plantear y resolver problemas, 3) comunicar, 4) conectar y 5) representar, dando más énfasis al proceso de plantear y resolver problemas y con los otros cuatro procesos brindando soporte.

Dentro de la resolución de problemas, el MEP (2012) establece que hay dos propósitos principales: 1) el aprendizaje de los métodos o estrategias para plantear y resolver problemas y 2) aprendizaje de los contenidos matemáticos (conceptos y procedimientos) a través de la resolución de problemas.

2. Realidad de aula

Fornacier, citado por Gaete y Jiménez (2009, p. 99) señala que "Una condición necesaria para enseñar matemática es saber matemática. Entonces y previo a toda otra condición, el maestro debe tener alguna competencia y comprensión del contenido y de las habilidades asociadas al mismo; debe saber, también, lo que significa trabajar en matemática. Además, "desde el punto de vista de la formación se requiere una que dinamice el aula de clase, la llene de contenido útil y atractivo, como lo señalan tanto los docentes, en la crítica de su propia práctica, como los estudiantes como víctimas de la mediocridad de la práctica pedagógica de los primeros" (Gaete y Jiménez, 2011, p. 99).



En una investigación realizada con docentes en Costa Rica, Gaete y Jiménez (2011) establecen, entre otros aspectos, las siguientes conclusiones en el factor que denominan pedagógico

* Los docentes de I y II ciclo del sistema educativo público tienen problemas para establecer estrategias de mediación pedagógica en el aula para la enseñanza de la matemática debido a una formación que no logra vincular la didáctica específica de la asignatura con el manejo de contenidos particulares. Por esta razón, las clases de matemática en primaria, al igual que en secundaria, son expositivas, basadas en prácticas con ejercicios fotocopiados y débilmente revisadas. Por otra parte los docentes reciben muy pocas capacitaciones y asesorías en la asignatura, las cuales, en su mayoría, no obedecen a un diagnóstico de necesidades e intereses curriculares de los mismos docentes, ni a un programa de formación continua.

* Las matemáticas pierden sentido para los estudiantes porque estos las perciben desvinculadas de la realidad. Por su parte, el cuerpo docente señaló que tuvieron muchas dificultades para poder contextualizar los contenidos con la realidad y experiencia inmediata del estudiantado.

* Los recursos didácticos con los que cuenta la clase de matemática son básicamente pizarra, tiza, fotocopias de prácticas y, en unos pocos casos, libros. La oferta educativa de matemáticas no cuenta ni con los recursos idóneos ni en cantidad ni en calidad suficiente, tampoco con textos idóneos para impartir las lecciones adecuadamente, con base en el debido soporte bibliográfico (2011. p. 61).

A pesar de que ya han transcurrido más de diez años de ese estudio, investigaciones más recientes señalan que esta situación sigue sin mostrar mejoras. En el quinto informe del Estado de la Educación (PEN, 2015), el cual contiene la información más detallada y reciente sobre educación primaria, se indica que en un estudio realizado con 180 estudiantes de primaria se determinó que en una prueba de cálculo realizada utilizando la batería de pruebas de aprovechamiento Woodcock-Muñoz-III-R, "el 53% de los estudiantes evaluados se encuentra por debajo del término medio esperado para tercer grado, ubicándose por encima de la media solo un 10% de de los participantes" (p. 136). En la prueba de fluidez matemática solo destacó un 1% de los participantes y el 75% se encuentra por debajo de la media en la prueba de



problemas aplicados. Todos estos resultados reafirman que la población estudiantil analizada tenía serias deficiencias para utilizar conceptos matemáticos en la resolución de problemas.

Por otro lado el Sexto Informe del Estado de la Educación (PEN, 2017), señala que las Pruebas Nacionales Diagnósticas han mostrado que "los niños de primaria apenas logran habilidades y destrezas básicas en las diferentes materias. En estas pruebas se valoran tres niveles de desempeño de acuerdo con los contenidos de los programas de estudios de Español, Estudios Sociales, Ciencias y Matemáticas, donde el nivel I es el más bajo y el III el más alto, según la complejidad de las habilidades. Los resultados indican que la mayoría de los estudiantes de sexto grado se ubicó en el primer nivel de desempeño en materias como Matemáticas (66%), Ciencias y Estudios Sociales (57%). Esto significa que son capaces de reconocer, describir, ordenar, parafrasear e interpretar conceptos y reconocer definiciones, vocabulario, nombres de periodos, personajes, lugares y clasificaciones, pero no adquieren habilidades de los niveles superiores tales como resolver problemas o situaciones a partir de los cuales extraer conclusiones, comprender relaciones de causa y efecto de los diferentes procesos de estudio y reconocer ventajas y desventajas, así como interpretar y hacer conjeturas" (Programa Estado de la Nación, 2017, p. 144). Este Sexto informe también señala que hay relación entre el nivel alcanzado por cada estudiante en las pruebas y la calidad de la enseñanza brindada por el profesorado, ya que las técnicas pedagógicas utilizadas y las posibilidades de tener mejor desempeño en las pruebas se correlacionan.

3. Formación continua de docentes en Costa Rica

La formación continua de docentes de primaria y secundaria ha sido muy débil y desarticulada en Costa Rica. Por ejemplo durante los años 2007 y 2008, un grupo de docentes reportó que "la oferta de capacitación y asesoría docente es prácticamente inexistente y la poca que se brinda es de mala calidad" (Gaete y Jiménez, 2009, p. 18). Esto provoca que haya gran cantidad de docentes con "serias debilidades pedagógicas que no favorecen el desarrollo de clases interesantes, dinámicas, creativas, participativas - principal queja de los estudiantes- sino clases deficientemente memorísticas" (Gaete y Jiménez, 2009, p. 18). El profesorado encuestado también reportó sus limitaciones en metodologías para enseñar



matemática. En esa misma investigación las directoras y directoras de instituciones educativas afirmaron que los procesos de formación continua no se adaptan a las necesidades docentes, sino más bien a las establecidas por el Ministerio de Educación.

Más recientemente, el Programa del Estado de la Educación (2015), indicó que la oferta de formación continua seguía siendo dispersa y con gran cantidad de oferentes. El programa sugiere que es fundamental que el profesorado conozca la propuesta del Ministerio de Educación Pública y que el reto es la implementación exitosa de esta propuesta curricular. A raíz de la reforma curricular de 2012, el Ministerio de Educación ha hecho esfuerzos con el fin de realizar formación continua de docentes de manera masiva a través de la implementación de cursos MOOCs (Massive Open Online Courses) y mini MOOCs. Este tipo de cursos permite la formación continua de docentes en todas las regiones del país. En la segunda mitad del 2014 y durante el 2015 se ofrecieron cursos virtuales para docentes de Primaria y Secundaria, mientras que más recientemente los esfuerzos se han concentrado en cursos MOOCs para estudiantes de bachillerato (<https://www.reformamatematica.net/bimodales-y-mini-moocs/>).

En la página web mencionada se indica que están realizando procesos exploratorios para determinar cuál de las modalidades podría generar más impacto. A pesar de todos los esfuerzos hecho, la formación continua sigue estando desarticulada hasta el presente.

II. Investigación previa relacionada con el diseño de procesos de formación continua y aprendizaje del docente.

1. Procesos de formación continua

El profesorado tiene la responsabilidad de implementar las reformas curriculares en el aula y deben ofrecer educación de calidad a sus estudiantes. Sin embargo, investigación previa ha demostrado las dificultades que tiene el cuerpo docente para implementar esos cambios (Garet, Porter, Desimone, Birman, & Yoon, 2001).

Los procesos de formación profesional son importantes para mejorar el conocimiento que posee cada persona docente (Koellner, Jacobs, & Borko, 2011). Estudios previos a nivel internacional, han



demostrado que procesos de formación continua de calidad mejoran la calidad de las escuelas (Desimone, 2009) y el desempeño del estudiantado (Wayne, Yoon, Zhu, Cronen, & Garet, 2008). Este es un tema de investigación que ha ganado la atención de los y las investigadoras en diferentes partes del mundo (Borko, 2004). Diferentes estudios han analizado de qué manera el cuerpo docente aprende y también cómo se podría mejorar la calidad del proceso de formación continua. En el pasado se han analizado diferentes recursos utilizados durante los procesos de formación continua, tales como el trabajo del estudiantado (como ejemplo Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010; Kazemi & Franke, 2004), el uso de videos (por ejemplo Sherin, Linsenmeier, & van Es, 2009), o el rol de la persona facilitadora del proceso (Coles, 2013; Linder, 2011; van Es, Tunney, Goldsmith, & Seago, 2014). Mejorar los procesos de formación continua es muy importante para poder acrecentar el conocimiento que posee el cuerpo docente, ya que este impactará la calidad de la educación ofrecida al estudiantado (Koellner, Jacobs, & Borko, 2011).

2. Perspectiva sociocultural

Mucha de la investigación sobre cómo el cuerpo docente aprende se ha realizado considerando la perspectiva sociocultural, la cual se enfoca en sistemas de actividad, los cuales son definidos como "organizaciones complejas que contienen los aprendices, docentes, materiales curriculares, herramientas y el ambiente físico" (Greeno, 2006, p. 79). Esta perspectiva visualiza el conocimiento y el aprendizaje pensando en cómo el individuo se posiciona en el contexto sociocultural (Evans, Packer, & Sawyer, 2016). Así, el conocimiento "no es una estructura mental dentro de la cabeza del estudiante, sino que el proceso de conocer incluye la persona, las herramientas y otras personas en el ambiente, así como las actividades en las cuales el conocimiento será aplicado (Sawyer, 2006, p. 5).

Aprender se entiende como "el progreso a lo largo de trayectorias de participación, las cuales incluyen actuar de manera más efectiva dentro de las funciones de la comunidad y en el desarrollo de identidades como personas que aprender y conocen" (Anderson, Greeno, Reder y Simon, 2000, p. 12).

El aprendizaje se define en términos de cambios a través del tiempo, cómo y por qué una intervención o experiencia cambia lo que la gente hace y cómo lo hacen (Greeno, 2006). El aprendizaje



es visto como un proceso individual de cómo entender cómo participar en el discurso y las prácticas de una comunidad particular y también como un proceso comunal para refinar normas y prácticas a través de las ideas y maneras de pensar que diferentes miembros llevan a la comunidad (Putman & Borko, 2000).

Esta perspectiva es diferente a la cognitiva, la cual ha sido tradicionalmente usada para analizar el aprendizaje. La perspectiva sociocultural brinda oportunidades para analizar diferentes variables que la perspectiva cognitiva no incluye, tales como el análisis de las interacciones sociales entre las personas y cómo esas interacciones impactan los aprendices y les proveen oportunidades para aprender (Anderson, Greeno, Reder, & Simon, 2000; Greeno, 2006). Aquí la unidad básica de análisis es la práctica cognitiva y no el individuo (Spillane, Reiser, & Gomez, 2006). Esto permite analizar normas, conocimiento, prácticas, lenguaje, artefactos, interacciones entre actores y otras variables que pueden influenciar cómo las personas aprenden y también permite analizar el aprendizaje puede ofrecer más ideas acerca de cómo la reforma puede ser implementada en el sistema educativo (Spillane et al., 2006).

Anotaciones:

Los resultados encontrados muestran que el definir normas de trabajo claras en las sesiones con docentes hace que cambien su forma de razonar matemáticamente y empiezan a valorar otras opciones de resolver operaciones con números naturales. Se observa que las personas docentes intentaron cambiar sus prácticas tradicionales. Por ejemplo, Carmen en la sesión 3 indicó “Yo usualmente lo hago así, hasta ahora que usted nos puso en práctica en el diagnóstico esas otras formas nos puso a ponerlas en práctica, entonces ahora lo hice así diferente pero usualmente lo clásico”. Por esta razón, se revisó Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

Objetivos del proyecto

Objetivo general



Analizar el aprendizaje de docentes de primaria de escuelas públicas que participan en un proceso de formación continua en matemáticas que promueve el pensamiento numérico en relación con las operaciones básicas con números naturales y diseñado con base en postulados socioculturales.

Anotaciones del objetivo general:

El curso realizado se basó en el desarrollo del pensamiento numérico tanto en las docentes como parte de su formación matemática, así como el análisis del pensamiento numérico de sus estudiantes. También se trabajaron ideas relacionadas con cómo lograr mejorar el trabajo de aula para fomentar más la discusión matemática que permita comprender mejor ese razonamiento matemático de sus estudiantes. Se recogió información a través de grabaciones de las sesiones sincrónicas de zoom para posteriormente transcribir esa información y analizar el aprendizaje del grupo de docentes.

El análisis del aprendizaje del grupo de docentes se realizó a través del análisis de cambios en su participación tanto en el curso de formación, como también a través de los cambios que las docentes reportaron de su trabajo con sus respectivos grupos. Se logró identificar algunos cambios en la participación de las docentes, lo cual demuestra que hubo aprendizaje. Además, se pudo observar que el utilizar algunas expectativas de cómo participar ayudó a que algunos de los cambios sucedieran pronto durante el curso. Esta creación de expectativas es denominado Normas Socio matemáticas por Yackel y Cobb (1996). En los Anexos 2 y 3 se resumen ideas importantes sobre los cambios en la participación, el cual describe el aprendizaje del profesorado.

Objetivos específicos

Objetivo 1: Analizar la forma de aprendizaje del personal docente que participa en un proceso de formación continua sobre desarrollo del pensamiento numérico, diseñado a partir de postulados socioculturales.

Meta 1: Estrategias de aprendizaje observadas durante el proceso de formación continua.



Notas: Para lograr esta meta se analizó la información recogida a través de las grabaciones de las sesiones sincrónicas de zoom. En los anexos 2, 3 y 7 se muestra evidencia de los aprendizajes observados. En el anexo 5 se presenta la ponencia presentada en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa en México y en la cual se mencionan algunos de estos cambios en la participación relacionados con las expectativas iniciales.

Se observaron cambios en la participación tan temprano como en la sesión 3. Las mismas docentes reportaron que las expectativas creadas en torno al diagnóstico de conocimientos matemáticos que se hizo en la sesión 1, modificaron su forma de pensar algunos de los ejercicios propuestos. Algunas de las expectativas iniciales propuestas por la facilitadora fueron: evitar el uso de algoritmos al resolver ejercicios con operaciones básicas con números naturales y pensar cuáles podían ser diferentes formas de resolver un ejercicio o problema.

A continuación, se detallan resultados obtenidos en relación con la forma de aprendizaje a partir del análisis que se realizó.

1. Importancia de definir normas de trabajo o expectativas (Ver anexo 5):

Desde que se aplicó el diagnóstico (Ver Anexo 1), durante la sesión 1, se insistió en la necesidad de no utilizar cálculos exactos ni algoritmos para resolver los ejercicios propuestos en ese instrumento. Además, se le solicitó al grupo justificar y explicar cada respuesta, aunque el ejercicio fuera de selección única. En el diagnóstico había preguntas sobre el sistema de numeración decimal, la descomposición de números, operaciones básicas con números naturales y relaciones de orden entre números naturales.

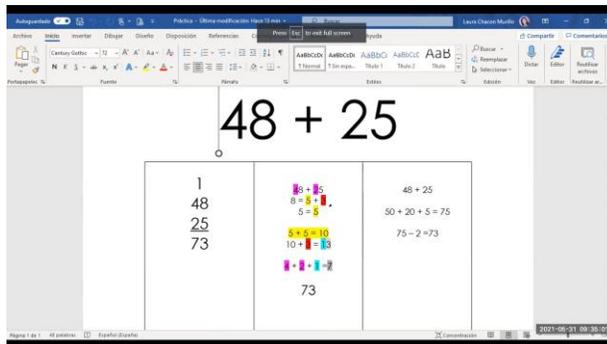
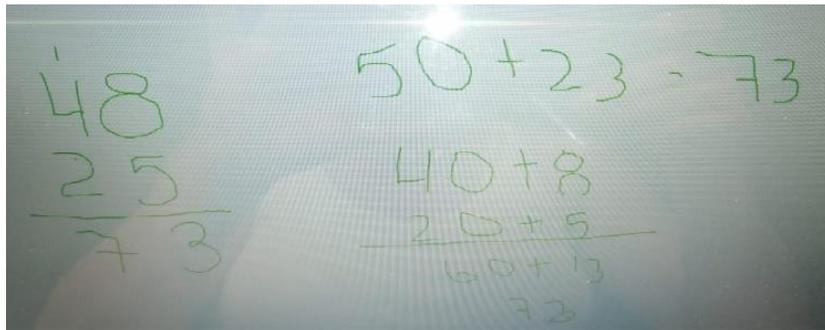
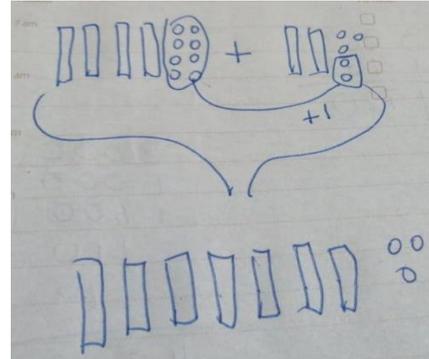
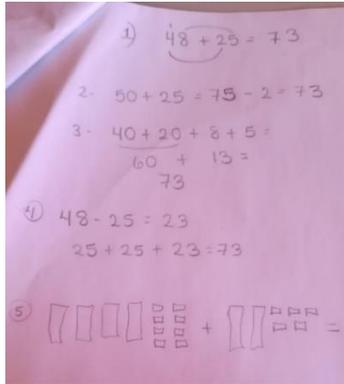
En este proceso de aplicación del diagnóstico, se insistió bastante en evitar el uso de algoritmos y utilizar más otros conocimientos y la lógica matemática. Esto puede relacionarse con lo que Yackel & Cobb (1996) denominan normas sociomatemáticas . (Ver Anexo 5 para más detalles)

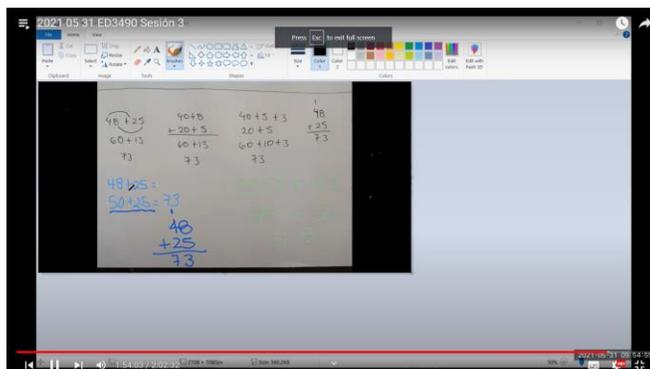


En la sesión 3 se inició con el análisis de estrategias para realizar operaciones con números naturales, iniciando con la suma de números naturales. De los comentarios de las docentes se puede observar que los cambios en su forma de pensar los ejercicios surgieron a partir de la experiencia del diagnóstico. Se nota desde la sesión 3 que algunas docentes empezaron a utilizar estrategias de cálculo diferentes a las que normalmente utilizaban o enseñaban. Algunas docentes fueron muy explícitas al respecto en sus comentarios. Por ejemplo, Carmen dijo, en relación con un ejercicio de suma con números naturales: “Yo usualmente lo hago así, hasta ahora que usted nos puso en práctica en el diagnóstico esas otras formas nos puso a ponerlas en práctica, entonces ahora lo hice así diferente, en pero usualmente lo clásico. (Sesión 3)”. Además, desde la sesión 3 de trabajo se observa que las docentes pudieron establecer varias estrategias diferentes para realizar la misma operación a partir de las expectativas mencionadas (ver anexo 3). También se observa que las docentes pudieron comprender las estrategias propuestas por sus compañeras y las pudieron explicar. Se nota en las estrategias propuestas, que las docentes utilizaron diferentes formas de representación y cálculo, a veces con dibujos y otras veces utilizando diferentes descomposiciones de los números.

A pesar de que las docentes en su mayoría señalaron que utilizaban métodos muy tradicionales para realizar los cálculos, al fijar la expectativa de encontrar diferentes estrategias para resolver la operación $48 + 25$, se logra establecer varias posibilidades. Para realizar esta tarea se dividió el grupo en subgrupos y trabajaron de manera independiente primero y luego se hizo una discusión del grupo completo (Ver Transcripción de la Sesión 3) Muchas de ellas estaban basadas en el tema de descomposición de números y el uso de material concreto, específicamente con el uso de los bloques multibase, los cuales fueron introducidos en la sesión 2, con el uso de material virtual (Ver Mathigon.org y la transcripción de la sesión 2)

Ejemplos:





Esa idea de utilizar diferentes posibilidades para resolver ejercicios se mantuvo durante todas las sesiones, tanto utilizando operaciones básicas, redacción y análisis de problemas y cuando se valoró trabajo del estudiantado. Se observó que las docentes siempre estuvieron dispuestas a proponer o analizar diferentes alternativas de solución.

2. Cambio en el uso de estrategias

Durante la sesión 3, cuando se analizaron las estrategias para realizar sumas con números naturales, algunas docentes mencionaron que utilizaban métodos pocos comunes para realizar sus propios cálculos numéricos. También reconocieron que, a pesar de eso, no son métodos que enseñan a sus estudiantes, a pesar de considerar que les ayudaba personalmente a hacer el cálculo más rápido y sin utilizar lápiz y papel.

Se percibe una sensación de cierta culpa por el uso de métodos que no son el tradicional para sumar números naturales en la Sesión 3. Eso evidencia que las docentes piensan que hay un método “correcto” para resolver la suma y no están tan acostumbradas a utilizar diferentes estrategias con sus estudiantes. A pesar de lo anterior, durante esta sesión ya empezaron a pensar en nuevas estrategias de cálculo y poco a poco dejaron de mencionar que había “un método correcto” y empezaron a ver con más naturalidad la utilización de diversas estrategias.



En la sesión 4 ya se mostraron más confiadas con el uso de nuevas estrategias. Por ejemplo, plantearon varias posibilidades para sumar $48 + 75$ utilizando redondeos tales como $50 + 80$ u $50 + 75$. Carmen hizo un comentario muy importante aquí al analizar por ejemplo por qué $48 + 75$ puede realizarse con el cálculo $50 + 75 - 2$, al afirmar que: “Para mí, por ejemplo, porque uno siempre tiene que pensar que los aprendizajes son un escalón más, para mí esto es increíble. le voy a decir porqué, porque es algo muy sencillo, muy cotidiano y cualquiera diría ¡Ay por favor quién no lo va a saber!, verdad, pero cuando uno llega al colegio y le dicen que ese 2 cancela con ese 2, uno dice por el amor de Jesucristo, pero por qué se cancela uno dice y no le encuentra sentido a eso y hasta ahora le viene a encontrar el sentido”.

Por otro lado, en ocasiones, a pesar de que ven la utilidad de cierta idea o estrategia, también reflejan que esa idea podría funcionar para quien no domine el algoritmo, Por ejemplo, se observa en la Sesión 5 con este comentario de Carmen.

Carmen: Y de hecho yo lo estaba pensando no con la desagrupación porque..., pero sí es necesaria en este caso, porque es muy fácil como quedan todas las cantidades, imagínese, a 100 quitarle 98, queda super sencillo que es donde realmente de la otra manera se le complica, bueno, a cualquiera que no domine bien el algoritmo. (Sesión 5)

Este uso de estrategia fue ampliado al resolver ejercicios de resta. Por ejemplo, en la Sesión 5, Carmen pudo proponer como solución al ejercicio 3000-1998 la respuesta $3000-2000+2$, aunque luego se mostró un poco confundida. Aquí se observa que poco a poco las docentes empezaron a pensar los ejercicios utilizando nuevas ideas. Las estrategias utilizadas muestran que van diversificando su pensamiento matemático y utilizaron más componentes del sentido numérico al resolver las operaciones (Almeida, Perdomo y Bruno, 2014),

Hubo también comentarios en relación con la enseñanza del algoritmo de manera memorística, sin haberse cuestionado previamente por qué funciona, y justificando que lo utilizan simplemente repitiendo



lo que le habían enseñado cuando eran ellas las estudiantes. Algunas docentes inclusive verbalizaron la necesidad de aprender nuevas opciones de cálculo, ya que la única opción que conocían era el algoritmo.

3. Reflexión sobre diferentes estrategias les permitió comprender conceptos estudiados previamente y que les había causado confusión en algún momento de su proceso de formación.

Las docentes pudieron, a partir del análisis de ejercicios y de diferentes estrategias de cálculo, hacer conexiones a conocimientos previos y a vacíos de conocimiento que tenían de experiencias previas. Esto también demuestra la importancia de analizar las estrategias de cálculo y valorar muchas opciones, ya que esto es lo que permitió analizar a profundidad sus ideas matemáticas. Algunas docentes mostraron su sorpresa al analizar algunas de las estrategias. En algunos casos por la simplicidad de la solución y porque nunca la habían considerado. Además, hubo comentarios que mostraron que conocimientos previos tales como que al sumar números opuestos “se cancelan” no había sido comprendido durante la enseñanza secundaria y afirmaron haberlo comprendido durante el análisis de las estrategias.

También hubo comentarios en relación con la comprensión de cuál es el uso de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, Carmen señaló que ahora sí entendía para qué se usaba a partir de la revisión de un ejercicio.

Otro comentario similar surgió en la sesión 9 (Ver Anexo 3), en donde la misma docente, Carmen, hizo un comentario sobre la importancia de comprender a profundidad la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma. Ella afirmó que: “se resuelven unos ejercicitos, pero más nada. No le vemos. De hecho, recuerde, profesora, que nosotros en el colegio lo usábamos, pero más nunca sabíamos por qué, como ahora”.

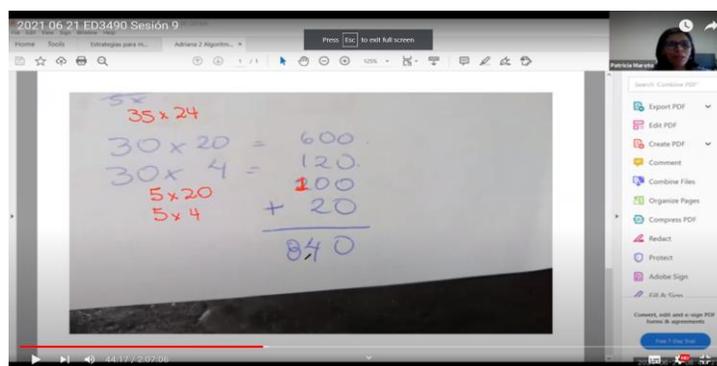




4. Las docentes hacen conexiones a temas estudiados durante las sesiones previas y tratan de aplicarlos en la solución de operaciones.

Hay dos temas de los cuales hay evidencia de que fueron comprendidos a profundidad: el valor posicional de un número y la descomposición de números naturales. Por ejemplo, se nota que comprenden el uso del valor posicional para justificar el algoritmo de la multiplicación o para poder analizar nuevas estrategias de cálculo. En la Sesión 9 se inició la revisión del tema de multiplicación con números naturales. Se les pidió multiplicar 35×24 utilizando el algoritmo tradicional y luego la facilitadora preguntó cuál es la razón para dejar un espacio a la derecha cuando se multiplica por el 2 del 24 por 5. Con las razones que aportan las docentes, se nota que pueden razonar mejor y encontrar justificaciones matemáticas a ciertos procesos realizados previamente muy mecánicamente.

Otro ejemplo que muestra que las docentes comprenden el concepto del valor posicional y que pueden aplicarlo a nuevas propuestas de ejercicios se puede observar en la siguiente imagen. En esa discusión la docente afirmó que lo intentó a raíz de las discusiones previas cuando se analizó suma y resta de números naturales. Otra docente señaló que nunca se le hubiera ocurrido hacerlo de esa forma, pero dijo que sí la había comprendido.





Hubo otros momentos en donde indicaron haber encontrado nuevas soluciones a un ejercicio a partir de las discusiones previas. Por ejemplo, al iniciar el tema de estrategias para multiplicación se les pidió resolver la operación 36×4 sin utilizar el algoritmo. Jimena hizo conexiones a las estrategias de suma que habían sido analizadas previamente.

Durante el análisis de estrategias de cálculo de multiplicaciones, se observa que las docentes utilizan el conocimiento previo para tratar de inventar nuevas estrategias para la multiplicación. Por ejemplo, Carmen dijo que no lograba encontrar una respuesta. A la pregunta de la facilitadora de la razón para no encontrar la respuesta dijo: “Porque estaba intentando hacerlo como lo hacíamos con la suma, descomponiendo cantidades, pero no me daba. Hasta que logré procesarlo y ya me dio” (Sesión 9). Más adelante en esa sesión, Carmen también comentó que: “lo intenté porque recuerde que esto lo empezamos a poner más en práctica cuando vimos la suma con usted, cuando vimos la suma, entonces lo intenté ahora por eso. Pero al principio no me daba porque no estaba utilizando bien el valor posicional”. También Jimena señaló que “Yo lo hice diferente. Yo apliqué lo que habíamos usado como en las sumas dije: multipliqué 4×40 y luego le resté 4×4 , 16.”

También se observó durante el análisis de la multiplicación, que pudieron realizar estrategias un poco más complejas y basadas en el uso de puntos de referencia (Almeida, Perdomo y Bruno, 2014), como por ejemplo utilizar el número 30 para resolver la operación 27×4 . En este ejercicio en particular hubo muchas posibilidades propuestas, lo cual demuestra que lograron un pensamiento más flexible.

También se observó que, durante la revisión de posibles estrategias para división, pudieron descomponer los números de una manera flexible, por ejemplo, en las estrategias propuestas para dividir 180 entre 14.

Durante la revisión de posibles estrategias para división, se observa también que han podido ir madurando la idea de descomposición de los números para pensar en nuevas estrategias de cálculo.



5. Importancia de compartir con pares

Desde el punto de vista sociocultural es muy importante el aprendizaje a través de las experiencias compartidas con otras personas. Algunos de los comentarios evidencian que las sugerencias de solución a algunos ejercicios dada por algunas personas ayudaron a las demás docentes a analizar nuevas ideas y hasta a aplicarlas en la solución de ejercicios, como ya fue mencionado. En algunos casos las nuevas ideas les ayudaron a analizar la razón de ser de un algoritmo, a realizar un procedimiento de una manera más ágil. Esto se observa aún tan temprano como la sesión 3.

6. Inclusión de nuevas ideas en el planeamiento e implementación de las lecciones.

A partir de la sesión 5 las docentes empiezan a pensar sobre las alternativas que podrían utilizar para implementar nuevas ideas en el aula. Por ejemplo, durante la discusión de estrategias para resolver la operación 3000-1998, Paula dijo:

Porque bueno, yo siento que esa forma, o sea nosotros somos los que tenemos que enseñarles a ellos esa manera de restar, ir desagrupando. Es toda una metodología que tenemos que implementar. Entonces cuando lleguemos a las restas siento que ya ellos lo van a hacer muy conscientemente, o sea tener conciencia de lo que este la posición del número y cómo lo desagrupamos. O en las sumas cómo lo vamos a ir agrupando. (Sesión 5)

Más adelante en la discusión, Carmen señaló que:

Se me ocurre ahora que usted nos dice eso, que entonces eso es como una manera de preparar el terreno para ese tipo de actividades, es foguear a los chiquillos porque siempre nuestro objetivo es ponerle restas como la que está arriba. Entonces poner a los chiquillos 1998, o sea siempre como con un numerito solo para completar, solo para completar sumas y así, para que el día de mañana que vayamos a hacer restas entonces ellos vayan notando ese aspecto. (Sesión 5)

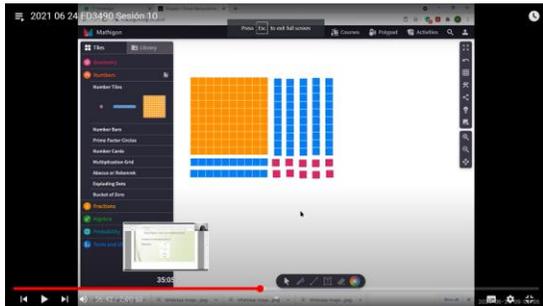


En estos dos comentarios se observa que las docentes muestran disposición para integrar a su práctica docente nuevas ideas relacionadas con las operaciones con números naturales. Se evidencia que podrían empezar a planear sus lecciones pensando más a mediano plazo, de manera que puedan ir construyendo ideas importantes que permitan ir preparando al estudiantado para resolver ejercicios con más nivel de complejidad.

7. Conexiones entre áreas matemáticas

Otro aspecto observado, se relaciona con las conexiones que empiezan a observar las docentes entre diferentes temas o áreas matemáticas. Por ejemplo, se hizo el análisis entre la operación 15×12 , luego de haber analizado 13×14 su representación gráfica. Una docente hizo una conexión a geometría al relacionar esta representación con el tema de área de figuras compuestas. (Sesión 10).

Aquí también una docente comentó sobre la importancia de uso de material concreto y cómo eso puede favorecer la comprensión de los temas y las estrategias.



Objetivo 2: Identificar cambios en el planeamiento que realiza el profesorado participante en el proceso de formación continua que muestren más promoción del pensamiento numérico en sus lecciones.



Meta 1: Cambios en el planeamiento que evidencian mayor fomento del pensamiento numérico, tales como el tipo de problemas propuestos, estrategias utilizadas para el análisis de la solución de los problemas con sus estudiantes.

No fue posible visitar la institución para compartir la experiencia de planeamiento debido a las restricciones sanitarias. Sin embargo, algunas de las docentes planearon e implementaron en sus aulas algunos de los problemas analizados en clase y también modificaron otros que ellas tenían disponibles. Creo que lo más importante en relación con los cambios en el planeamiento fue definir un espacio de tiempo dentro de la clase que les permitiera observar de qué forma sus estudiantes pensaban las soluciones a los problemas y cómo realizaban el cálculo de algunas operaciones con números naturales, a pesar de las limitaciones de tiempo que tenían en ese momento.

Durante el 2021 las docentes estaban implementando Guías de Trabajo Autónomo, estaban trabajando con la mitad del grupo en cada período de tiempo y estaban lidiando con grandes retos porque el estudiantado estaba en diferentes niveles de desarrollo. Esta situación la resumió Claudia durante una discusión, al indicar que:

Porque como dice la niña Jimena, yo creo que la mayoría en este momento tenemos dos grupos. Yo tengo un grupo super avanzado y un grupo muy atrasado y ese grupo atrasado es el que no se conectó, el que no trabaja, el que no sigue las indicaciones que se le dan en las guías, y por último las presentan, pero están realizadas por alguien, lo menos es por ellos. Entonces uno ve que no hay ese compromiso para aprender. Ahí tenemos que luchar también contra esto, contra esa pereza, contra esa apatía al estudio porque no quieren asumir un compromiso. Imagínense que yo lo estoy viendo chiquitos de 8 años. Llegan a las 7 de la mañana ¿a qué hora nos vamos?, ¿a qué hora es el recreo?, ¿falta mucho para



irnos? Digo yo, ay, Dios mío, tan chiquititos y en esto, entonces ¿ve el ambiente, profesora? Es muy difícil para nosotros abarcar tantas cosas y ahora menos con un tiempo tan limitado. Yo estoy recurriendo a lo concreto y me estoy devolviendo. De hecho, que el programa se presta, en mi caso, pero yo creo que las compañeras que van en grados más avanzados es mejor detenerse y perder un poquito para lograr a ver si ellos entienden y que se vayan con los conocimientos básicos bien, sino van a seguir mal y mal y mal todos los años que sigan. (Sesión 17)

A pesar de que las docentes tenían situaciones bien difíciles en sus instituciones educativas, algunas de las docentes planearon y aplicaron algunos ejercicios y problemas en sus lecciones para valorar la implementación de algunas ideas importantes desarrolladas en el curso, tales como la observación y análisis del razonamiento matemático del estudiantado al resolver ejercicios y problemas.

Limitaciones: Debido a la situación sanitaria que tenía el país en ese momento no fue posible visitar las instituciones educativas, pero se realizó el análisis considerando los reportes que hicieron las docentes de las ideas que pensaron o planearon para trabajar en clase.

Objetivo 3: Analizar si los y las docentes participantes promueven el desarrollo del pensamiento numérico durante la implementación de las lecciones.

Meta 1: Cambios observados en la implementación de las lecciones en relación con la forma en que se explica el tema o se resuelven los ejercicios, los argumentos que utilizan para justificar sus soluciones.

Debido a la situación de pandemia y la suspensión del curso lectivo durante el año 2021 durante varias semanas, no se pudo observar lecciones para determinar si las docentes realizaban cambios en sus lecciones al promover el desarrollo del pensamiento numérico en sus estudiantes. Sin embargo, se motivó



a las docentes a implementar algunas de las ideas analizadas en el curso en sus lecciones. Algunas de ellas lo lograron y luego reportaron su experiencia durante las sesiones sincrónicas. En estos reportes fue claro que hubo cambios en la forma en que desarrollaron sus lecciones y promovieron el pensamiento numérico.

En la Sesión 16 la facilitadora pidió a las docentes implementar de manera voluntaria en el aula algunos problemas y concentrar su atención en las estrategias que utilizaba el estudiantado para resolver los problemas. Durante la sesión 17 se revisaron algunas de las experiencias. Por ejemplo, Jimena dijo:

Yo en realidad nunca me había puesto a analizar hasta ahora que usted nos está como preparando en esto, cómo ellos o qué estrategias utilizan para resolver, nada más, en realidad uno se preocupa por si lo resolvió bien o lo resolvió mal hasta ahora me pongo a pensar y a analizar cómo lo hace cada uno. (Sesión 17).

Por otro lado, Claudia también comentó sobre esta experiencia:

Bueno, yo hice el experimento de los problemas que usted, que vimos la semana pasada, copié algunos en una hojita y se los di para que ellos leyeran y trataran de resolver, y como le dije, unos así casi que mentalmente los resolvieron, nada más hacían la representación de la respuesta, otros sí fue muy difícil y otros del todo no pudieron resolverlo y digamos podríamos decir que utilizaron casi que la mayoría de las estrategias desde el primero, desde el mayor, contando hasta o algunos para atrás, otros hacían grupitos y quitaban. Entonces conversamos mucho yo les pedí que nos explicaran a cada uno cómo lo resolvieron, qué pensaban y fue muy bonito. Vieras que la experiencia, aprendieron ellos y aprendí yo, porque me dije de verdad el detenerse, observar y analizarlo ya, así, pensado, entonces uno dice si tengo que hacer esto o corregir en esto, tengo que tomar esta estrategia para reforzarla y ver la necesidad de cada estudiante. (Sesión 17)



Aquí también se puede notar que Claudia puso atención a las diferentes estrategias utilizadas por el estudiantado. Utilizó lenguaje aprendido en el curso, tal como “contar hacia atrás”, que era una estrategia de conteo revisada cuando se analizó el pensamiento matemático del estudiantado.

Más adelante Carmen dijo:

Bueno profesora, yo concuerdo con las compañeras y también concuerdo con Jimena que este tema de por lo menos hacerle como una radiografía al problema esto no era algo que estuviera en nuestra práctica. Es algo que estamos aprendiendo aquí. También, por ejemplo, yo lo que sí hacía con los chiquillos era como desglose de tareas. En este problema tenían que poner tantas habilidades en práctica: suma, resta, la conversión, por ejemplo, si esa es una conversión y esas cosas eso sí los desglosábamos nosotros cuando resolvíamos problemas. Sin embargo, yo le digo a los chiquillos que me acuso, les decía yo el otro día que estuvimos también haciendo ese material que le mandamos, que me acuso de que a veces para que no estén dando tantas vueltas ahí uno les pega más de un empujón y también eso ha facilitado que estén con tanto retroceso para resolver problemas. Donde uno ve que les cuesta tanto, que están pegados, uno les pega un empujón que tal vez no es el conveniente para que ellos piensen y ahora que yo estaba haciendo ese materialito que le mandé a usted, yo me senté con un chico y le decía bueno qué fue lo que usted entendió, lo que usted nos decía el otro día, y ahí fuimos y bueno después más adelante yo le contaré la experiencia tuvo cosas bonitas, pero si a ellos les cuesta mucho, de verdad, y tal vez nosotros a veces en mi caso me ha costado esa aparte, encauzarlos, entonces a veces seguro más rápido les digo para poder avanzar, sí, y después chiquillos es que hicimos esto y habrá quien entienda y otros se quedaron que ni supieron qué pasó por ahí. (Sesión 17)

Estos tres comentarios evidencian nuevos aprendizajes y prácticas en el aula para las docentes. Se nota que empezaron a poner más atención al trabajo del estudiantado y además entendieron que deben



cambiar la forma en que apoyan la resolución de los ejercicios y problemas que realizan sus estudiantes, de manera que puedan pensar más en las ideas matemáticas.

Limitaciones: Como ya ha sido mencionado, no fue posible observar lecciones presenciales y el análisis se basó en los reportes hechos por las docentes.

Objetivo 4: Realizar un análisis de las necesidades del profesorado.

Meta: Identificar necesidades del grupo de docentes para definir de manera específica la intervención a revisar.

El curso de formación inició con el análisis de operaciones básicas con números naturales y diferentes estrategias para resolver ese tipo de ejercicio. Conforme fue avanzando el curso se realizó un proceso constante de revisión de necesidades y las sesiones se fueron construyendo a partir de la comunicación constante entre docentes y facilitadora para ir tratando de orientar el trabajo según los objetivos de ambas partes. Una necesidad muy importante que existen entre el profesorado se relaciona con el tema de evaluación. A este tema le dedicamos una sesión de trabajo, pero no fue posible profundizar en él porque no considero que sea la persona experta para abordar temáticas relacionadas con la normativa del Ministerio de Educación Pública. En una actividad posterior, se hizo un contacto entre el Programa de Formación Continua de la Sede de Occidente y algunas de las maestras que participaron del proceso de formación continua y que están trabajando en San Ramón, para coordinar espacios de trabajo con la Asesora Regional de Evaluación del Ministerio de Educación Pública. De esta manera traté de apoyar con esta debilidad.



III. Referente Teórico

A continuación se presentan algunas ideas importantes que delinear el proyecto que se propone.

1. Proceso de formación continua para docentes de matemática

El proceso de formación continua de docentes en Costa Rica ha sido un proceso muy débil y sin un rumbo claro. En los últimos años el Ministerio de Educación Pública ha realizado pocos esfuerzos integrados para ofrecer capacitación continua de calidad al cuerpo docente en servicio, a pesar de que ya hay reportes del poco conocimiento matemático que tienen los docentes de secundaria y primaria (http://www.nacion.com/opinion/editorial/Mala-formaciondocentes_0_1599240064.html). Menos esfuerzos se han hecho por entender de qué manera se puede mejorar la forma en que el cuerpo docente aprende durante el proceso de formación continua o cuáles son las características de la persona facilitadora son claves para mejorar ese proceso de aprendizaje (Borko, Koellner, & Jacobs, 2014).

Con la implementación de los más recientes planes de estudio de matemática para todos los niveles del sistema educativo a través de habilidades específicas y la promoción de resolución de problemas, es imperante promover y mejorar procesos de formación continua que permitan al cuerpo docente actualizar sus conocimientos en lo que se ha denominado conocimiento matemático para enseñar (Mathematical Knowledge for Teaching, Ball, Thames, & Phelps, 2008). Esto implica apoyar no solo el aprendizaje del conocimiento matemático que posee el cuerpo docente, sino que incluye seis subdominios diferentes Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), Conocimiento del Horizonte (HCK), Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y Conocimiento del Currículo (KCC).

Este proyecto de investigación determinará aspectos importantes sobre cómo el profesorado desarrolla su pensamiento numérico en relación con operaciones básicas con números naturales y cómo ese aprendizaje permea su práctica docente. Se espera que comprender este proceso ayuda a mejorar los procesos de formación continua que pueden ser desarrollados a futuro.



2. Comunidades de práctica

Dentro de la perspectiva sociocultural, una idea muy importante que está siendo investigada es cómo mejorar el conocimiento del docente a través de comunidades de práctica (Wenger, 1998). Las comunidades de práctica son un concepto muy importante que conecta el conocimiento con la participación (Little, 2003). Este concepto puede ser usado para investigar el aprendizaje en las aulas y en los procesos de formación continua. Pueden ser definidas como "un grupo de personas que comparten problemas, la pasión por un tópico, y que profundizan su conocimiento y experiencia a través de su interacción continua" (Wenger, McDermott, & Snyder, 2002). La gente que participa en una comunidad de práctica se reúne para discutir ciertos tópicos. Además se construyen relaciones y un sentido de pertenencia al trabajar con otras personas. Esto les permite desarrollar un sentido de identidad común (Wenger et al., 2002).

Para este proyecto, el proceso de formación continua a desarrollar será analizado como una comunidad de práctica. Cuando los maestros tienen que hablar con sus pares para discutir ideas, tienen que negociar nuevos significados y este proceso les ayuda a aprender (Miyake & Kirscher, 2014). La investigación previa ha demostrado que simplemente organizar los docentes en comunidades de práctica no garantiza el aprendizaje, y por tanto es importante conocer qué hace una comunidad de práctica exitosa (Miyake & Kirchner, 2014). Esto ayudará a mejorar las intervenciones con docentes (Miyake & Kirshner, 2014).

Como parte de los esfuerzos por investigar de qué manera el profesorado aprende en una comunidad, hay algunas ideas que no han sido exploradas de manera suficiente y que pueden contribuir al conocimiento que existe sobre cómo mejorar los procesos de formación continua y por tanto el conocimiento de la persona docente y del estudiantado. Uno de estos temas es la perspectiva sociocultural para analizar el conocimiento del docente como "social, cultural e históricamente construido (Horn, 2010, p. 228) y analizar "las interacciones específicas y dinámicas por las cuales una comunidad constituye un recurso que permite al cuerpo docente aprender e innovar en su práctica de enseñanza" (Little, 2013, p.



913). También se necesita más investigación para analizar la relación entre la mejora de la enseñanza, el discurso de los y las docentes en las sesiones de desarrollo profesional y su aprendizaje profesional (Horn y Kane, 2015). La relación entre discurso, enseñanza y la acción de enseñar requiere de más análisis (Horn y Kane, 2015).

3. Aprendizaje en una comunidad de práctica

El concepto de aprendizaje situado enfatiza en la importancia del contexto para analizar las relaciones humanas y la comunicación entre las personas (Lave & Wenger, 1991). Brown, Collins y Duguid (1989) afirman que "la actividad en la cual el conocimiento es desarrollado y utilizado es parte integral de lo que es aprendido. Aprendizaje y cognición son fundamentalmente situados" (p. 32). En el contexto educativo es necesario incluir el contexto para crear conocimiento útil. Las prácticas del profesorado están situadas en la cultura en la que trabajan y se necesita constantemente "negociar significados y construir comprensión" (Brown et al., 1989, p. 35). El aprendizaje, en una perspectiva sociocultural, es conceptualizada como cambios en la participación como parte de la comunidad de práctica (Cobb & Bowers, 1999; Horn, 2010; Lave, 1996; Lave & Wenger, 1991). Esto es la construcción de identidades dentro de las comunidades (Goos, 2014, Greeno & Gresalfi, 2008; Wenger, 1998) que ayuda a hacer cambios que transforman las prácticas comunes (Cobb & Bowers, 1999).

En esta concepción de conocer y aprender como un proceso social, Lave y Wenger (1991) definen el concepto participación periférica legítima para explicar la relación entre el aprendiz, quien se ubica en la periferia y el experto, quien está en el centro de la práctica, Los miembros de la comunidad que tienen más experiencia tienen tres funciones muy importantes: a) promover la participación de los otros participantes, b) tomar responsabilidades como parte de la comunidad para negociar nuevos significados y c) aumentar el conocimiento que tienen y que puede ser utilizado en la práctica de la comunidad (Goos, 2014; Wenger, 1998). A través del proceso de aprendizaje, los novatos se mueven de la periferia a la participación completa como un experto al convertirse en parte de la comunidad de práctica (Greeno y Engeström, 2014; Lave y Wenger, 1991).



Convertirse en un participante legítimo en una comunidad implica "aprender cómo hablar (o ser silencioso) de la misma manera que los participantes más experimentados (Lave y Wenger, 1991, p. 105). Esto implica también un proceso que no es individual, sino que se desarrolla en las interacciones con otras personas participantes en la comunidad, a través de las cuales se construyen nuevos significados acerca de sus prácticas. Ejemplos de cómo los miembros de una comunidad cambian incluye cómo los patrones de participación cambian a través del tiempo (Greeno & Engeström, 2014), cómo las trayectorias de participación son construidas, o cómo la identidad crece como miembro de la comunidad (Greeno, 1998).

Para el presente proyecto, el proceso de formación continua a desarrollar será conceptualizado como una comunidad de práctica, en el cual los y las docentes participan en equipos conformados por docentes de la misma escuela y nivel con el fin de que se puedan apoyar mutuamente y puedan aprender como un colectivo, lo cual podría facilitar el aprendizaje a través de la participación e interacción con sus pares. La persona facilitadora del proceso de formación continua, en este caso la investigadora principal, ofrecerá acompañamiento desde la teoría matemática y didáctica según el tema que sea definido como de interés por el grupo docente, el cual debe estar relacionado con pensamiento numérico. Para el proceso de investigación, se analizará cambios en la participación durante el proceso de formación continua, tanto en las sesiones de trabajo conjuntas, como desde la práctica de aula para observar de qué manera los y las docentes participantes se convierten en miembros más experimentados de la comunidad de práctica. Cambios que podrían ser observables son cambio en la selección de problemas o la forma en que son analizados y resueltos tanto en las sesiones de trabajo con otras personas docentes, como en los documentos de planeamiento y en la implementación de la lección. Se podría observar cambios en el razonamiento matemático al entender mejor los conceptos matemáticos al tener posibilidades de entender mejor ciertas ideas. También se puede analizar los factores en los que se centra el discurso durante las sesiones de trabajo con otras personas docentes. Por todo lo anterior, el objeto de estudio de este proyecto es el grupo de docentes de educación primaria que participan del proceso.



4. Características esenciales de un proceso de formación continua que promueva el aprendizaje

El presente proyecto pretende analizar el proceso de aprendizaje de un grupo de docentes durante un proceso de formación continua de un grupo de docentes de educación primaria en el área de Matemática. Investigación reciente a nivel internacional ha profundizado el análisis de cómo mejorar la calidad de los procesos de formación continua de docentes en todos los niveles del sistema educativo. Como parte de estos esfuerzos, las ciencias del aprendizaje han surgido como un campo interdisciplinario que analiza la enseñanza y aprendizaje visualizando estos procesos desde lo cognitivo y lo social (Sawyer, 2014). Parte de este campo de investigación sobre el aprendizaje de los y las docentes está asociada con la perspectiva sociocultural ya mencionada, la cual se centra en la actividad en los sistemas, la cual señala que "los sistemas sociales complejos contienen aprendices, docentes, materiales curriculares, herramientas informáticas y el ambiente físico" (Greeno, 2006, p. 79) y es en ese contexto en que sucede el proceso de aprendizaje. El aprendizaje es definido como el "progreso a lo largo de trayectorias de participación, las cuales pueden involucrar la actuación más efectiva contribuyendo de manera más central a las funciones de las comunidades y desarrollando sus identidades como personas con más conocimiento" (Anderson, Greeno, Reder, & Simon, 2000, p.12).

Para esta perspectiva, "el conocimiento y el aprendizaje están situados en los contextos físicos y sociales, social en naturaleza y distribuida a través de las personas y herramientas. El aprendizaje es definido en términos de cambios a través del tiempo, cómo y por qué una intervención o experiencia cambia lo que la gente hace y cómo lo hace (Greeno, 2006). El aprendizaje es visto como "un proceso individual que involucra entender cómo participar en el discurso y las prácticas de una comunidad particular y el proceso de la comunidad de refinar normas y prácticas a través de las ideas y maneras de pensar que los miembros de la comunidad traen a la discusión" (Putman & Borko, 2000, p.12).

Dentro de este cuerpo de investigación se han ido identificando características indispensables en los procesos de formación continua con el fin de lograr procesos más efectivos. Garet, Porter, Desimone,



Birman y Suk Yoon (2001) concluyen, a partir del resumen de varias investigaciones previas y de su propio trabajo, que las características más importantes están relacionadas con los siguientes cinco aspectos:

a. Duración procesos más extensos proporcionan más oportunidades por discusiones más profundas sobre los contenidos, las concepciones y errores de los y las estudiantes y también en relación a las estrategias pedagógicas. Además, el proveer más tiempo permite al grupo docente experimentar en el aula y obtener retroalimentación durante las sesiones de trabajo.

b. Participación colectiva la participación de un grupo de docentes de la misma institución o grado proporciona varias ventajas, tales como discusión de conceptos, habilidades y problemas que surgen en el proceso. Además, el grupo docente comparte materiales didácticos y evaluaciones. Otra ventaja es que el trabajo en equipo ayuda a sostener los cambios a través del tiempo y la eventual sustitución de algunos docentes por traslado de institución podría afectar menos el proceso.

c. Centrarse en el contenido a pesar de que se necesita más análisis, hay un cuerpo de investigación que señala que enfocarse en contenidos específicos podría ser importante para cambiar las prácticas de enseñanza.

d. Promoción del aprendizaje activo el grupo docente debe tener oportunidades de discutir, planear y practicar, también deben observar lecciones o ser observado. Es necesario proveer oportunidades para planear nuevos materiales, probar nuevos métodos de enseñanza y revisar trabajos de los y las estudiantes en los tópicos analizados, así como hacer presentaciones, liderar discusiones y escribir sobre el tema en estudio.

e. Tener coherencia se debe construir a partir de lo que el profesorado conoce, enfatizar en los criterios definidos en el currículo nacional, permitir el desarrollo sostenido a través del tiempo y promover la comunicación profesional continua con otros docentes que están tratando de cambiar sus prácticas docentes. Para efectos del presente proyecto se pretende seguir estas recomendaciones, de manera que se cumpla con este mínimo de requerimientos con el fin de garantizar la calidad del proceso de formación a diseñar y así poder valorar cambios en la participación del grupo docente en el proceso.



5. Sentido numérico

Con el fin de cumplir con la característica mencionada en el apartado anterior denominada “Centrarse en el contenido”, este proceso se centrará en el fomento del sentido numérico. El sentido numérico permite comprender los patrones que se establecen en matemáticas y la importancia de los números para resolver problemas de la vida cotidiana. El desarrollo de este pensamiento no implica la repetición mecánica de procedimientos que no ayudan a comprender profundamente el concepto del sistema de numeración decimal o comprender propiedad de los números o el sentido de las operaciones.

Para lograr este tipo de comprensión profunda, es importante la utilización de diferentes métodos para resolver las operaciones o problemas que son planteados al estudiantado y que permitan profundizar en conceptos tales como la organización del sistema decimal a partir de potencias de base diez y la composición y descomposición de números, entre otros (Obando & Vásquez, 2008).

Adicionalmente, promover el desarrollo del pensamiento numérico permite al estudiantado comprender diferentes representaciones del mismo concepto y hacer conexiones a diferentes contextos matemáticos y de la vida cotidiana. Este es un proceso gradual, que debe ser promovido incluso antes de iniciarse la educación formal y que debe ser fortalecido en todos los niveles escolares (Almeida, Bruno, & Perdomo-Díaz, 2014, McIntosh et al., 1992) por su importancia en el desarrollo del pensamiento matemático superior (Obando & Vásquez, 2008). Almeida, Bruno, & Perdomo-Díaz (2016) basados en la clasificación previa propuesta por McIntosh et al. (1992) proponen siete componentes del pensamiento numérico:

- 1) comprender el significado de los números,
 - 2) reconocer el valor relativo y absoluto de las magnitudes numéricas,
 - 3) usar puntos de referencia al hacer cálculos numéricos,
 - 4) componer y descomponer números,
 - 5) utilizar diferentes representaciones de los números,
 - 6) comprender el efecto relativo de las operaciones, y
-
-



7) desarrollar estrategias apropiadas para evaluar si una respuesta es razonable o no.

En la primera categoría, *Comprender el significado de los números* se incluye conocer el orden de los números, cuál es la relación entre diferentes tipos de números, el conocimiento profundo del sistema de numeración decimal y el significado de ser posicional. *Reconocer el valor relativo y absoluto de las magnitudes numéricas* incluye la comparación y ordenamiento de los números, así como la estimación el tamaño absoluto de un número o cantidad. Cuando se utilizan *puntos de referencia*, el estudiante está utilizando números que le facilitan los cálculos que realiza. La utilización de composición y descomposición de los números permite al estudiante encontrar expresiones equivalentes a un número dado y que permitan realizar de manera más eficiente los cálculos mentales. Es también importante la utilización de múltiples representaciones de los números y las operaciones, las cuales incluyen las representaciones gráficas y pictóricas. En la categoría *Comprender el efecto relativo de las operaciones* se incluye conocer cuáles son operaciones inversas y el uso de las propiedades de ciertos conjuntos de números para encontrar el resultado de una operación aritmética. En el último componente denominado *Desarrollo de estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta*, se considera el análisis de la respuesta y su significado en un contexto específico, así como el uso eficiente de diferentes estrategias o la escogencia de la mejor dadas ciertas condiciones. Es importante el desarrollo del sentido numérico en el profesorado, ya que se ha notado que el poco conocimiento sobre el tema que tiene el profesorado en servicio y en formación dificulta lograr avances en el conocimiento del estudiantado (Almeida, Bruno, & Perdomo-Díaz, 2014, Tsao, 2004; Yang, Reys, & Reys, 2007).

Este proyecto pretende realizar una intervención de formación continua con un grupo de docentes de educación primaria integrando las ideas antes mencionadas, tales como la necesidad de crear comunidades de práctica en las instituciones educativas. Para el diseño de la intervención, se utilizarán como mínimos las características identificadas por investigación previa en relación con las características esenciales que debe poseer este tipo de procesos de garantizar algún éxito en relación con el aprendizaje



del cuerpo docente. En el proceso de formación continua se ofrecerán oportunidades del grupo de docentes para que analicen diferentes estrategias sobre las operaciones con números naturales.

Se espera que el trabajo realizado les permita analizar profundamente el sistema de numeración decimal, las propiedades de las operaciones con números naturales y que el profesorado desarrolle nuevas habilidades de cálculo numérico basadas en un pensamiento matemático más flexible y eficiente.

Se espera que la intervención favorezca la reflexión sobre nuevas formas de planear e implementar las lecciones, de manera que se promueva también el desarrollo del pensamiento flexible en el grupo de estudiantes a cargo de cada docente. El proyecto dará seguimiento a las tres etapas proceso de formación continua, planeamiento e implementación de las lecciones con el fin de analizar si hubo cambios en el proceso.

Anotaciones

El proyecto logró durante el 2021 cumplir con la mayoría de las características importantes definidas para los procesos de formación continua

1. Duración: Se trabajaron en total 32 sesiones con el grupo, para un total de 54 horas sincrónicas de trabajo a través de la plataforma zoom.

_ Durante 7 semanas, se trabajaron dos sesiones semanales de dos horas cada una, para un total de 28 horas (durante la suspensión del curso lectivo realizado por el Ministerio de Educación en las escuelas). Es importante destacar que fueron las docentes quienes decidieron trabajar todas esas semanas, incluyendo las que correspondían a sus vacaciones.

_ Del 15 de julio al 05 de agosto se trabajaron dos horas por semana, para un total de 8 horas.

_ Desde el 06 de agosto y hasta el 02 de diciembre se trabajaron 14 sesiones de una hora.

2. Participación colectiva: debido a problemas con el reclutamiento de las docentes, esta característica se cumplió parcialmente, ya que se aceptaron docentes sin compañía de otras personas de su propia escuela. Sin embargo, del grupo de docentes que se mantuvo hasta el final, tres docentes eran de la misma



escuela y hubo otra docente de esa misma escuela que participó casi hasta el final del proceso. 3. Centrarse en el contenido El curso implementado estuvo centrado en las operaciones básicas con números naturales.

En una primera etapa se trabajó con diferentes estrategias que promueven el cálculo mental y la comprensión de las operaciones y los números naturales de una manera más profunda. Los algoritmos no fueron promovidos en el proceso, pero sí se analizó el por qué funcionan y cuáles son las limitaciones que tienen. Además, se analizó el diseño de problemas asociados con esas operaciones básicas.

La segunda parte del curso se centró en el pensamiento del estudiantado al resolver problemas con números naturales. Las docentes estuvieron expuestas a muchas alternativas de solución realizada por estudiantes. Este trabajo se basó en el libro de Carpenter, Fennema, Franke, Levi, & Empson). Aquí se trabajó por separado cada una de las operaciones básicas, analizando las estrategias que utilizan considerando varias categorías modelación directa, con papel y lápiz, de conteo, basadas en conocimiento previos y también los diferentes tipos de problemas que fueron definidos para cada operación.

En la parte final del curso se trabajó analizando diferentes estrategias para promover más discurso matemático en el aula, siempre utilizando trabajo del estudiantado para el análisis de los temas tratados.

3. Promoción del aprendizaje activo: Se promovió la participación de todas las personas durante todas las sesiones. En algunos momentos se realizó trabajo en grupos o se ofreció tiempo para valorar ejercicios, estrategias o problemas de manera que pudieran analizar de manera pausada algunas ideas y luego pudieran participar de la discusión.

4. Tener coherencia: Se construyó basado en los temas de matemática para primaria y la resolución de problemas es un tema prioritario dentro del programa de estudios oficial del Ministerio de Educación Pública. En varios momentos las docentes señalaron que lo discutido se relacionaba con su trabajo en el aula.

Referencia Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L., & Empson, S. B. (2015). *Children's mathematics. Cognitively guided instruction*. Heinemann.



IV. Procedimiento metodológico

Este proyecto de investigación se ubica en el enfoque de investigación cualitativa (Creswell, 2013) y más específicamente se identifica como un estudio que utiliza la metodología denominada investigación-acción.

Para Elliot, “el objetivo fundamental de la investigación-acción consiste en mejorar la práctica en vez de generar conocimientos. La producción y utilización del conocimiento se subordina a este objetivo fundamental y está condicionado por él” (Elliot, 2005, p. 67). Hernández Sampieri, y Mendoza Torres (2018), citando a Sandín, señalan que “la investigación-acción pretende, esencialmente, propiciar el cambio social, transformar la realidad (social, educativa, económica, administrativa, etc.) y que las personas tomen conciencia de su papel en ese proceso de transformación” (p. 552).

Cuando se utiliza investigación-acción, “el conocimiento y la comprensión de los fenómenos estudiados se construyen mediante la práctica, y a partir de la reflexión y la acción directa del sujeto responsable de la investigación” (Chaves, Díaz, García, Rojas y Solís, 2010, p. 22). Los participantes son “parte del objeto de estudio y logran, mediante el proceso investigativo, reconstruirse y superar la condición en la que se encontraban al momento de inicio del proceso” (Campos y Madriz, 2015, p. 8). Esto implica que la realidad se transforma a través de la reflexión a través del proceso y los participantes también modifican sus prácticas (Campos y Madriz, 2015).

Para este proyecto se esperan generar cambios en las prácticas educativas que mejoren el trabajo docente en las aulas de educación primaria. Esa mejora en la práctica de mueve en dos direcciones. Por un lado, se espera mejorar el conocimiento matemático y la práctica en el aula de un grupo de docentes de primaria. Además, se espera que los resultados obtenidos también ayuden a la investigadora principal, quien será la facilitadora del proceso de formación continua, a mejorar su propia práctica al trabajar en la formación de docentes de la educación primaria en formación y en servicio. Para lograr estas metas, durante las sesiones de trabajo se promoverá la discusión conjunta de los temas en análisis, la reflexión



sobre la práctica educativa, el proceso de planeamiento y la implementación de lecciones, de manera que el grupo de docentes y la investigadora principal encuentren formas de mejorar sus prácticas educativas.

La modalidad propuesta de investigación-acción se denomina técnica o empírico analítica, ya que en este caso la investigadora principal es quien diseña el proceso de formación continua, el problema a investigar y cuáles cambios en el conocimiento matemático y cuáles cambios esperables en la práctica educativa van a ser fomentados en el proceso. A pesar de eso, la participación del grupo de docentes en el proceso es fundamental para lograr las metas planteadas, ya que cada persona debe tomar sus propias decisiones sobre sus prácticas educativas y de qué manera puede transformarlas a la luz de las nuevas ideas que se proponen en el proceso de formación continua. La investigación-acción “abre la posibilidad para que el docente realice una reflexión crítica, problematice, analice y permita mejoras desde y para su propia práctica, es decir, en forma intrínseca a su labor profesional cotidiana” (Campos y Madriz, 2015, p. 40). En este proceso, la investigadora experta acompañará el proceso proponiendo nuevas ideas en relación con estrategias para realizar operaciones con números naturales y cómo esas estrategias favorecen el desarrollo pensamiento numérico, guiará las discusiones sobre cómo se podrían implementar estas estrategias durante las lecciones de matemática con estudiantes de primaria y cómo integrar ese conocimiento a las cinco áreas de estudio definidas por el Ministerio de Educación Pública, a saber Números, Medidas, Geometría, Estadística y Probabilidad y Relaciones y Álgebra. Sin embargo, cada docente tomará el protagonismo en relación a las formas en que puede implementar esas ideas en sus planeamientos e implementación de lecciones. Se espera que las discusiones generadas en las sesiones de trabajo conjunto favorezcan la reflexión para realizar cambios en sus prácticas educativas.

Fases de la investigación-acción

Campos y Madriz (2015) proponen que la investigación-acción tiene tres fases secuenciales. A continuación, se mencionan esas fases y la forma en que serán implementadas en este proyecto de investigación



_ Inserción la investigadora visitará las escuelas de los circuitos 01 y 03 de la Dirección Regional de Occidente, se informará a los directores sobre el proyecto y se solicitará su autorización para motivar al cuerpo docente de primer y segundo grado a participar en el proceso. Se contactará al grupo de docentes que muestren interés y se les explicarán las condiciones de trabajo. Se deberá definir un cronograma de trabajo que funcione para todas las personas. Se debe generar un espacio que permita un acercamiento respetuoso, en el que se analicen las necesidades del grupo docente y de la investigadora principal, se definirán expectativas de trabajo y cuáles serán intereses comunes. Esto guiará el diseño del proceso de formación continua. Se utilizará un documento de consentimiento informado para que las partes muestren su acuerdo.

_ Diagnóstica: Se aplicará un instrumento de diagnóstico (Almeida, Bruno y Perdomo Díaz, 2014) para determinar las habilidades numéricas que ha desarrollado hasta la fecha cada persona participante. Este documento se analizará de manera cualitativa, para conocer las estrategias utilizadas para resolver los problemas planteados. También se realizará un diagnóstico de necesidades del profesorado utilizando el modelo ANISE de Pérez Campanero (1994).

_ Transformadora: Se realizarán las sesiones de trabajo de todo el grupo de docentes, en los cuales se analizarán conceptos fundamentales asociados a diferentes estrategias que favorezcan el desarrollo del pensamiento numérico en relación con las operaciones básicas con números naturales. Por otro lado, se participará de algunas sesiones de planeamiento de lecciones y se observarán lecciones. La información recolectada servirá para diseñar las sesiones siguientes de trabajo conjunto.

Categorías de análisis para procesar las sesiones de formación continua

Desde una perspectiva sociocultural aprender se relaciona con cambios en la participación, en este caso en relación con las sesiones de formación continua, así como desde la práctica de aula para observar de qué manera los y las docentes participantes se convierten en miembros más experimentados de la comunidad de práctica. Cambios que podrían ser observables son cambio en la selección de problemas o la forma en que son analizados y resueltos, tanto en las sesiones de trabajo con otras personas docentes,



como en los documentos de planeamiento y en la implementación de las lecciones. Se podría observar cambios en el razonamiento matemático al entender mejor los conceptos matemáticos al tener posibilidades de comprender mejor ciertas ideas.

En relación con el análisis de la información recolectada en las sesiones de trabajo del grupo completo, se pueden analizar cambios en las discusiones que suceden durante el proceso, los cuales están relacionados con diferentes categorías que investigación previa han reportado como importantes para identificar aprendizaje en el cuerpo docente. Algunas de esas categorías son actores (el foco de las conversaciones se centra en el estudiantado o en el docente), tema tratado (pensamiento matemático, pedagogía, clima, manejo del aula u otros), postura asumida (describir, interpretar o evaluar) y nivel de especificidad (los comentarios son generales o específicos) (van Es and Sherin, 2008).

Para efectos del análisis de los planeamientos se analizará la calidad de los ejercicios y problemas propuestos para la lección observando el nivel de complejidad definido (según la propuesta del Ministerio de Educación (2012) son reproducción, conexión o reflexión) y su relación con las estrategias didácticas propuestas durante el proceso de formación continua en relación con el desarrollo del pensamiento numérico.

Para la observación de lecciones, se definirá un instrumento con evidencia de validez previa, que permita recoger la información relacionada con el nivel de los ejercicios y problemas propuestos en clase, el tipo de soluciones que se plantean para resolver los ejercicios y la calidad de la discusión que se genera en clase, para definir si hubo cambios en la implementación de las clases y el fomento del pensamiento numérico. De no ser posible encontrar tal instrumento, la investigadora principal utilizará un diario para recoger información durante las lecciones observadas, lo cual se cotejará con el planeamiento y se analizará si hubo mejoras a través del año escolar. También se podrían utilizar escalas de Likert para poder comparar el proceso a través del tiempo.

Para todos los efectos se agregarán nuevas categorías de análisis a partir de la información que vaya revelando el proceso de análisis de la información. Estas categorías emergentes se contrastarán con la



literatura disponible con el fin de fortalecer el apoyo teórico que requiere este proceso (Campos y Madriz, 2015).

Etapas del proyecto de investigación

Este proyecto de investigación se divide en dos etapas

Primer año

La recolección de la información se realizó el primer año a través de un proceso de formación continua de docentes de primaria que trabajen en primero o segundo grado y que mostraron interés en desarrollar su pensamiento numérico y en reflexionar sobre la enseñanza de estos temas. Se trabajó con docentes de todo el país al realizarse una convocatoria abierta por redes sociales debido a problemas asociadas a la Covid 19 y la suspensión del curso lectivo durante 2021.

Recolección de la información

La recolección y análisis de la información se centró en las grabaciones hechas de las sesiones sincrónicas de trabajo con las docentes. Se analizaron esas discusiones de manera que se pudieran observar cambios en su pensamiento numérico, la reflexión que hagan sobre su trabajo en el aula, etc. Desde una perspectiva sociocultural, el aprendizaje es analizado como cambios en la participación (Cobb & Bowers, 1999; Horn, 2010; Lave, 1996; Lave & Wenger, 1991). En los resultados se mencionarán algunos de los cambios que fueron observados.

Segundo año

Anotaciones año 1:

Las 32 sesiones de trabajo sincrónico con las docentes se grabaron y fueron transcritas y revisadas para su análisis posterior. Aún quedan unas pocas sesiones sin transcribir.

Hubo que hacer variaciones en la metodología planteada inicialmente debido a que hubo dificultades para reclutar las personas participantes y además por la pandemia se debió realizar el proceso



de manera virtual. Se pretendía realizar observaciones de aula, pero al suspenderse el curso lectivo eso no fue posible.

Se hicieron dos procesos de reclutamiento. El primero se hizo visitando las escuelas de los circuitos escolares planteados en el proyecto original, así como a través de llamadas telefónicas para conversar con las personas directoras de las instituciones. De esta forma se logró encontrar diez docentes interesados en participar. El día de la primera reunión solo se presentó una docente a la sesión, ya que el día anterior el Ministerio de Educación había anunciado la suspensión del curso lectivo por varias semanas. Por este motivo se hizo un segundo proceso de reclutamiento esta vez a través de la plataforma de Facebook y la ayuda de personas que tenían contacto directo con docentes en servicio. Muchas personas mostraron interés en participar. Se hizo una llamada telefónica a cada persona para brindarles información del proceso y finalmente se consolidó el proceso con 12 docentes. En el proceso algunas personas se fueron retirando por diversos motivos, como por ejemplo exceso de carga laboral o problemas de conexión a internet. Las docentes participantes se ubican en San Ramón, Alajuela, La Fortuna de San Carlos, Naranjo, Jacó y Cachí.

Se aplicó la prueba diagnóstica y esa misma prueba fue aplicada durante la última sesión de trabajo con el grupo, aunque en esta la participación de docentes fue muy escasa. La prueba contenía 14 ejercicios (Ver anexo en el SIGPRO). Se aplicó durante una sesión sincrónica en cada caso y se ofrecieron cuatro minutos para la realización de cada ejercicio.

Basado en los comentarios dados por las docentes en las sesiones sincrónicas, se propone que la acción transformadora propuesta en el proyecto se logró. Las docentes participantes señalaron en diferentes momentos que los temas discutidos en el curso les había ayudado a poner más atención al trabajo del estudiantado en el aula, a las estrategias y razonamientos matemáticos que utilizaban al resolver problemas. También se cuenta con trabajos de aula que fueron compartidos por las docentes en diferentes sesiones y de manera voluntaria, cuando implementaron nuevas ideas en el aula y algo les llamó la atención del trabajo de sus estudiantes.



Anotaciones Año 2:

Debido a la situación de pandemia la metodología de esta investigación tuvo que ser reformulada. Cuando inició el curso ofrecido a las docentes, el curso lectivo había sido suspendido por el Ministerio de Educación Pública. Cuando ya se restablecieron las lecciones había aún restricciones sanitarias importantes, tales como que las docentes trabajaban con la mitad del grupo a la vez y solo pocas horas al día. Además, se estaban utilizando documentos de planeamiento que el MEP denominó “Guías de Trabajo Autónomo” (GTA) y entonces las docentes tenían que adaptar su trabajo a esas condiciones dadas. Por esta razón, no fue posible observar las lecciones ni trabajar con las docentes en sesiones de planeamiento en las instituciones.

Como el curso ofrecido a las docentes fue bien extenso, entonces se trabajaron algunas sesiones en la revisión y en el diseño de problemas que pudieran ser utilizados en clase, partiendo muchas veces de los propuestos por ellas mismas. Por otro lado, se motivó a las docentes a intentar aplicar en clase algunas de las ideas analizadas en el curso para luego compartirlas con el grupo durante las sesiones sincrónicas. De esta manera se intentó lograr los objetivos propuestos. Considero que la metodología de investigación acción permitió trabajar en la mejora de la práctica educativa de las docentes participantes a través de mucha reflexión durante el proceso, así como el compartir experiencias de aula previas o que sucedían en el momento.

El curso puede ser dividido en tres partes esencialmente en las sesiones 3 a 6 y 9 a 13 se revisaron las operaciones básicas con números naturales. Estas sesiones se concentraron prioritariamente en la revisión de estrategias para sumar, restar, multiplicar y dividir números naturales. Las sesiones 6 (una parte), 7, 8, 13 (una parte), 14, y 15 se centraron en la construcción y análisis de problemas que se resuelven con esas operaciones básicas. Las sesiones finales se centraron en el pensamiento matemático del estudiantado y cuáles estrategias utilizan durante la clase para resolver operaciones y problemas con operaciones básicas con números naturales.



En total se trabajaron 32 sesiones, con una duración total de 47 horas. Debido a que el curso fue virtual, se realizó la grabación de todas las sesiones a través de la plataforma zoom. Esas grabaciones fueron transcritas por la asistente y la investigadora principal, quien revisó todas las sesiones que transcribió la asistente para cotejar su calidad, completarlas cuando fue necesario y corregir errores. Para realizar las transcripciones lo más completas posibles, se utilizaron dos versiones de la grabación de zoom, una en donde aparece la pantalla compartida y otra en donde aparece el nombre de la persona que habla. Esto permitió identificar a prácticamente a todas las personas durante las conversaciones y además rescatar las imágenes presentadas durante las sesiones de trabajo para así tener más claras las ideas desarrolladas durante las discusiones. En los anexos están algunas de las transcripciones como referencia para que se pueda observar el trabajo realizado.

Para codificar la información que fue analizada, se utilizaron 29 códigos, algunos de ellos extraídos de la literatura y otros que surgieron durante el análisis de la información. Se utilizó como criterio de segmentación de las discusiones realizadas durante las sesiones, que la conversación fuera sobre un mismo tema, lo que es definido como unidad de idea (idea unit) por Jacobs, Yoshida, Stigler, & Fernández (1997). Eso significa que hay segmentos de conversación cortos y otros extensos, dependiendo del foco de la conversación. En el Anexo 4 se puede leer la descripción de los códigos utilizados.

Todo el análisis de información se realizó con el software Atlas.ti en su versión web y luego los resúmenes obtenidos fueron analizados para extraer conclusiones.

Población de estudio

Diez docentes de primaria en servicio que trabajen en el área de matemática y, de manera indirecta, sus estudiantes. Se espera trabajar con docentes de los circuitos 01 y 03 de la Dirección Regional de Enseñanza de Occidente.

Anotaciones:



Como ya fue indicado anteriormente, se trabajó con doce docentes de diferentes lugares del país. Cuatro docentes participaron del proceso completo, mientras que la mayor cantidad de personas se mantuvo por las primeras siete semanas, las cuales fueron las semanas de suspensión del curso lectivo del Ministerio de Educación y las dos semanas de vacaciones de medio año. A petición de una de las directoras de una escuela en San Ramón, se incluyeron docentes de todos los grados, ya que de esa escuela en particular participaron cuatro docentes. Inicialmente se había planeado trabajar con docentes de I Ciclo. Sin embargo, considero que la experiencia fue muy valiosa y estuvo bien incluir docentes de todos los grados porque hubo diferentes perspectivas según el nivel que tenían a cargo las docentes.

Se trabajó con un grupo de docentes muy responsable y participativo durante las sesiones de trabajo. Fue realmente una limitación que las sesiones fueran virtuales en su totalidad, sin embargo, a pesar de esa situación, se crearon vínculos con algunas de las docentes, que aún permanecen. La mayoría de docentes que desertaron, lo hicieron después de la sesión 16, cuando ya se habían completado más de 32 horas de trabajo sincrónico y cuando se retomó el curso lectivo suspendido durante el 2021. Como se tuvo la posibilidad de trabajar bastantes horas, cuando las docentes retomaron sus lecciones, tuvieron la posibilidad de implementar algunas de las ideas que se analizaron en las sesiones de trabajo y reportar de vuelta al grupo de compañeras docentes y la facilitadora. Esto permitió acercar más el proceso al trabajo de aula y observar resultados interesantes. En algunos momentos las docentes inclusive se sorprendieron de observar algunas respuestas de sus estudiantes.

Análisis y Discusión de los Resultados

Del análisis realizado se nota que se lograron los objetivos planteados para este proyecto. Hay bastante evidencia de que se lograron cambios en la participación del profesorado y por tanto hubo aprendizaje por parte de las docentes (Cobb & Bowers, 1999; Horn, 2010; Lave, 1996; Lave & Wenger, 1991).



Es importante destacar que la creación de normas sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996) ayudó a que las personas participantes pudieran empezar a pensar en nuevas ideas sobre temas matemáticos ya conocidos por ellas y se logró realmente profundizar en ideas básicas, pero muy importantes relacionadas con las operaciones básicas con números naturales y conceptos del sistema de numeración decimal.

Se observó que había algunas ideas iniciales importantes, tales como que hay un “método correcto” para resolver las operaciones y a pesar de que las docentes utilizaban o conocían otros que consideraban efectivos, no los enseñaban a sus estudiantes. Sus comentarios dejaron ver que normalmente enseñaban una estrategia, la cual se consideraba la oficial de la institución o del aula. Si esa no funcionaba se podría utilizar otra, pero en general no había opción a utilizar múltiples estrategias de solución. A través del proceso, ese discurso desapareció de las sesiones y las docentes comprendieron que había muchas posibilidades de solución, las cuales también observaron en algunos de sus estudiantes cuando implementaron algunos ejercicios y problemas en sus lecciones.

A pesar de la evidencia encontrada sobre la mejora en el conocimiento matemático en relación con las operaciones básicas y toda la motivación observada en las docentes para pensar de manera más flexible, en algunos momentos las docentes señalaron la dificultad para salirse del algoritmo tradicional. Por ejemplo, Valentina, aún en la sesión 12, afirmó que le costaba pensar en otras posibilidades de solución y también hubo momentos en que los comentarios reflejaban que siempre seguían considerando el algoritmo como la opción más viable, aunque la evidencia les mostrara métodos más fáciles y ágiles de utilizar. Esto debe ser considerado al planear y dar seguimiento a los procesos de formación, ya que siempre es difícil lograr que las docentes realicen cambios en sus prácticas de aula.

El curso realizado y los resultados obtenidos apoyan la necesidad de diseñar procesos de formación de docentes en servicio que les permita profundizar y actualizar sus conocimientos de conceptos matemáticos. Para el diseño del curso de este proyecto, se hizo todo lo posible por considerar las características más importantes señaladas por Garet, Porter, Desimone, Birman y Suk Yoon (2001). Por ejemplo, fue importante que el curso de formación fue extenso. Eso permitió profundizar en conceptos



importantes, tales como la idea de agrupar y desagrupar números, los puntos de referencia para facilitar cálculos y la utilización de diferentes representaciones de una misma solución, entre otros. Estas ideas se fueron madurando a través del proceso de formación y se fue notando que las docentes pudieron integrar las ideas en procesos más complejos, tales como aplicar en la multiplicación conocimientos ya utilizados para sumar números naturales. Así, las docentes mostraron que pudieron desarrollar habilidades relacionadas con los siete componentes del pensamiento o sentido numérico propuestos por Almeida, Bruno, & Perdomo-Díaz (2016). Esto demuestra que pudieron mejorar su sentido numérico en relación con las operaciones básicas con números naturales.

Algunas de las docentes pudieron concentrar su atención durante ciertos espacios de sus lecciones en la forma en que sus estudiantes razonaban matemáticamente. Esta experiencia fue muy valiosa para las docentes porque no habían puesto suficiente atención a esos detalles y tuvieron muy buenas sorpresas en ese proceso. Aquí se puede notar que el proceso de formación se conectó a sus conocimientos y experiencias previas, lo cual permitió construir a partir de lo que conocían.

La duración del curso permitió también un mayor acercamiento entre las docentes, a pesar de que todo el contacto fue virtual. En este sentido, se puede considerar que se logró construir una comunidad de práctica, en la cual se fueron creando nuevos conocimientos a través del análisis de diferentes ejercicios y problemas durante las discusiones grupales realizadas. Una situación importante en este proceso es que del grupo de docentes que se mantuvo hasta el final del curso un alto porcentaje eran de la misma escuela, lo cual facilitaba la comunicación entre ellas.

Otra característica importante del curso y que apoyó el aprendizaje de las docentes fue que todas las sesiones se centraron en el mismo tema: operaciones básicas con números naturales, lo cual permitió profundizar bastantes estrategias de cálculo, diseño de problemas y el análisis del razonamiento matemático del estudiantado.



Finalmente, como educadora matemática de docentes de primaria a nivel universitario, fue muy valioso aprender de las experiencias de las docentes en servicio. Todo este proceso me permitió reflexionar sobre cómo mejorar los cursos que imparto a nivel universitario.

Considero que el respeto que se mantuvo por el conocimiento y la experiencia de cada persona fue clave para lograr un ambiente de trabajo adecuado para poder compartir ideas en un ambiente seguro, en el que se promovió la participación y donde todas las ideas eran valoradas y comentadas.

VI: Divulgación y Difusión

Curso

Se ofreció un curso corto virtual de ocho horas durante las Jornadas de cursos libres ofrecidos en la Sede de Occidente durante la última semana de junio y la primera semana de julio de 2021. Se trabajó únicamente con estrategias de cálculo con números naturales. A pesar de que el curso se divulgó para docentes de primaria, se matriculó gente de la comunidad, lo cual complicó un poco el planeamiento previamente definido. Eso también afectó la asistencia de las personas. Se matricularon 16 personas, pero no todas participaron del curso.

Además, se inscribió un proyecto de Extensión Docente en la Vicerrectoría de Acción Social, el cual no ha podido ser implementado durante 2022 ni 2023 por falta de apoyo presupuestario desde la Sede de Occidente. El proyecto está vigente hasta 2024 y por el momento está suspendido hasta finalizar el I Ciclo de 2023 esperando la posibilidad de contar con la jornada necesaria para su ejecución. En la propuesta inscrita ante la Vicerrectoría se pretende dar continuidad al trabajo realizado con las docentes durante 2021 y ampliar el trabajo a números racionales. Además, se pretende implementar el primer curso con un nuevo grupo de docentes.

Además, se presentó una ponencia sobre la importancia del establecimiento de expectativas iniciales (normas sociomatemáticas) en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME),



celebrada durante 2023 en México. En los anexos 5 y 6 se puede observar la carta de aceptación y la ponencia aprobada para su presentación.

VII. Vinculaciones

No hay vinculaciones con redes académicas u otras instancias.

VIII. Trabajos de graduación y participación estudiantil

Es importante destacar que también se realizó un Trabajo Final de Graduación conectado con este proyecto. En el SIGPRO se encuentra el documento final como anexo 8.

Este proyecto partió del mismo marco teórico desde el desarrollo del pensamiento numérico basado en Almeida (2017); Almeida y Bruno (2017); Almeida, Bruno y Perdomo (2014); Almeida, Bruno y Perdomo (2016); Almeida, Bruno y Perdomo (2017). Se desarrolló un Seminario de Graduación con las estudiantes: Dayana Paola González Mora, Adriana Vanessa Jiménez Ruíz, María Nohely Sibaja Elizondo y Katherine Yuliana Solórzano Jandres. Este TFG estuvo vigente de abril 2021 a diciembre 2022, cuando se realizó la defensa pública y se les asignó la categoría de aprobación con distinción por la calidad del trabajo realizado. Las estudiantes decidieron trabajar el desarrollo del pensamiento numérico con estudiantes finalizando la carrera de Enseñanza de la Matemática en la Sede de Occidente. Su objetivo general fue: "Caracterizar el uso de estrategias que utilizan un grupo de docentes de matemática en formación de la Universidad de Costa Rica, al emplear la multiplicación con números racionales para dar solución a algunas tareas matemáticas".

El trabajo con este grupo de estudiantes fue muy enriquecedor porque se trabajó de manera consistente, comprometida y con reuniones con frecuencia casi semanal durante la mayor parte del proceso. Eso permitió profundizar en el análisis del marco teórico en relación con el sentido numérico y hubo un crecimiento muy importante en su formación como docentes en relación con la forma en que debe ser enseñado el tema de fracciones para lograr la comprensión de los conceptos. Además, yo colaboré de



forma activa en ese proceso, ayudando con la selección de ejercicios, validación y sirviendo también como par en la revisión de la codificación y análisis de la información y por supuesto aprendí mucho en ese proceso.

La tesimaliana Adriana Vanessa Jiménez Ruiz fue la asistente del proyecto C1025 en 2021 y contribuyó con la transcripción de las sesiones de trabajo sincrónico. Ella fue también la líder del grupo de Trabajo Final de Graduación con sus aportes al trabajo.

IX. Informe financiero

Se gastó el presupuesto asignado al proyecto en la impresión y encuadernación de materiales para su consulta.

EJECUCIÓN PRESUPUESTARIA ACTUAL						
EQ	PARTIDA	ASIGNADO	AUMENTOS Y AMPLIACIONES	DISMINUCIONES Y DEDUCCIONES	EGRESOS	DISPONIBLE
0	No hay datos	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

EJECUCIÓN HISTÓRICA PRESUPUESTARIA				
PERIODO 2021				
PARTIDA	ASIGNADO	AMPLIACIONES	DISMINUCIONES	EGRESOS
1030300 - Impresión, encuadernación y otros	0,00	15.000,00	0,00	15.000,00
2990300 - Productos de papel, cartón e impresos	15.000,00	0,00	15.000,00	0,00
6020202 - Becas horas asistente:	662.800,00	2.269,40	2.128,37	662.961,03
Total	697.800,00	17.269,40	17.128,37	697.961,03

	ASIGNADO	AMPLIACIONES	DISMINUCIONES	EGRESOS
TOTALES	697.800,00	17.269,40	17.128,37	697.961,03



X. Aspectos éticos En esta sección, se debe adjuntar el formulario “Aplicación para revisión continua o para cerrar el estudio” del Comité Ético Científico. El formulario se puede acceder en este enlace <https://vinv.ucr.ac.cr/es/multimedia/formulario-aplicacion-de-revision-continua-o-cerrar-estudio-cec>

Dificultades encontradas

Anotaciones:

Definitivamente la situación general que ha generado la pandemia por la Covid-19 representó un reto para muchos de los proyectos por la necesidad que hubo de realizar adaptaciones. Sin embargo, también fue una gran oportunidad para lograr llegar a un público más amplio, que abarca todo el país y no depende de la cercanía de las personas con las sedes de la universidad. En mi caso, el convertir el curso en virtual permitió la participación de docentes de otras zonas del país, lejanas a San Ramón. La limitación fue que la observación de lecciones y de sesiones de planeamiento no pudieron ser llevadas a cabo.

La suspensión del curso lectivo también afectó el planeamiento original del proyecto. Sin embargo, quedo muy satisfecha con el grupo de docentes que participó del proceso por su gran compromiso con su propio aprendizaje a pesar de las condiciones complicadas que tenían por la carga laboral.

Para algunas personas la posibilidad de conectarse a las sesiones sincrónicas se vio afectada por la disponibilidad del servicio de internet. Este fue por ejemplo el caso de una docente de la zona de la Fortuna de San Carlos, quien a pesar de tener mucho interés en los temas del curso y gran compromiso con el trabajo que estábamos realizando, tuvo que desertar porque durante los meses de más lluvia tuvo serios problemas de conexión. Esto también deja ver que la brecha digital no solo es un problema para el estudiantado, sino que también afecta al personal docente.

Una experiencia que no me gustó del proceso fue que algunas personas directoras decidieron por su grupo de docentes la no participación, sin siquiera permitir la divulgación de los objetivos del proyecto. Me parece que esto limita el proceso de formación continua del personal docente de esas instituciones ya que no tuvieron la posibilidad de decidir. Por dicha esto no fue la norma y hubo mucho



apoyo en otras instituciones. Sin embargo, fue una situación que me provocó cierto malestar porque no me parece que sea lo adecuado.

X. Referencias

- Almeida, R. (2017). Sentido numérico en futuros profesores de matemáticas y alumnado de secundaria [Tesis de doctorado]. Universidad de La Laguna.
- Almeida, R., Bruno, A., & Perdomo-Díaz, J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 32(2), 9-34.
- Almeida, R., Bruno, A., & Perdomo-Díaz, J. (2016). Strategies of number sense in pre-service secondary mathematics teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(5), 959-978.
- Almeida, R., y Bruno, A. (2017). Estableciendo perfiles en el uso del sentido numérico [Establishing profiles on the use of number sense]. *REDIMAT*, 6(1), 56-84. doi: 10.17583/redimat.2017.1910
- Anderson, J. R., Greeno, J. G., Reder, L. M., & Simon, H. A. (2000). Perspectives on learning, thinking, Almeida, R., Bruno, A., y Perdomo, J. (2017). Evaluación del sentido numérico en tareas de fracciones. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 12, 9–30. <http://fpiem.webs.ull.es/index.php/fpiem/article/viewFile/152/201and> activity. *Educational Researcher*, 29(4), 11-13.
- Atlas.ti (Version 8). (2018). Scientific Software Development. <https://atlasti.com/>
- Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching What makes it special? *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.
- Borko, H., Koellner, K., & Jacobs, J. (2014). Examining novice teacher leaders facilitation of mathematics professional development. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 149-167.
- Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning Mapping the terrain. *Educational Researcher*, 33(8), 3-15.
-
-



- Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18(1), 32-42.
- Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational researcher*, 18(1), 32-42.
- Campos Céspedes, J. & Madriz Bermúdez, L. (2010). *Investigación-acción en contextos educativos*. San José EUNED.
- Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L., & Empson, S. B. (2015). *Children's mathematics. Cognitively guided instruction*. Heinemann.
- Chaves Salas, L., Díaz Madrigal, M., García Fallas, J., Rojas Alvarado, G., & Solís Sánchez, N. (2010). *Investigación-acción colaborativa Un encuentro con el quehacer cotidiano del centro educativo para su transformación*. San José Instituto de Investigaciones en Educación.
- Cobb, P., & Bowers, J. (1999). Cognitive and situated learning perspectives in theory and practice. *Educational Researcher*, 28(2), 4-15.
- Coles, A. (2013). Using video for professional development The role of the discussion facilitator. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16, 165–184.
- Creswell, J. W. (2013). *Qualitative inquiry and research design*. Estados Unidos SAGE.
- Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development Toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher*, 38(3), 181–199.
- Elliot, J. (2005). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid Ediciones Morata.
- Evans, M. A., Packer, M. J., & Sawyer, R. K. (2016). Introduction. In M. A. Evans, M. J. Packer, & K. Sawyer (Eds.), *Reflections on the learning sciences* (pp. 1-16). New York, NY Cambridge University Press.
- Friese, S. (2014). *Qualitative Data Analysis with Atlas.ti*. Londres SAGE.
- Hernández Sampieri, R., & Mendoza Torres, C. P. (2018). *Metodología de la investigación Las rutas cualitativa, cuantitativa y mixta*. McGraw-Hill Interamericana.
-
-



- Horn, I. S. (2010). Teaching replays, teaching rehearsals, and re-revisions of practice Learning from colleagues in a mathematics teacher community. *Teachers College Record*, 112, 225–259.
- Gaete Astica, M. y Jiménez Asenjo, W. (2009). Factores que inciden en el bajo rendimiento académico en matemática en I y II ciclo. San José, Costa Rica Departamento de Estudios e Investigación Educativa Ministerio de Educación Pública.
- Gaete Astica, M. y Jiménez Asenjo, W. (2011). Carencias en la formación inicial y continua de los docentes y bajo rendimiento escolar en matemática en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6(9), 93-117.
- Garet, M. S., Porter, A. C., Desimone, L., Birman, B. F., & Yoon, K. S. (2001). What makes professional development effective? Results from a national sample of teachers. *American Educational Research Journal*, 38(4), 915-945.
- Goos, M. (2014). Creating opportunities to learn in mathematics education A sociocultural perspective. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 439-457.
- Greeno, J. G. (1998). The situativity of knowing, learning, and research. *American Psychologist*, 53, 5-26.
- Greeno, J. G. (2006). Learning in activity. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 79- 96). New York, NY Cambridge University Press.
- Greeno, J., & Engeström, Y. (2014). Learning in activity. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences*. New York, NY Cambridge University Press.
- Greeno, J. G., & Gresalfi, M. S. (2008). Opportunities to learn in practice and identity. In P. Moss, D. Pullin, J. P. Gee, E. H. Haertel, & L. J. Young (Eds.), *Assessment, equity, and opportunity to learn* (pp. 170-199). New York, NY Cambridge University Press.
- Horn, I. S. (2010). Teaching replays, teaching rehearsals, and re-revisions of practice Learning from colleagues in a mathematics teacher community. *Teachers College Record*, 112, 225-259.
-
-



- Horn, I. S., & Kane, B. D. (2015). Opportunities for professional learning in mathematics teacher workgroup conversations Relationships to instructional expertise. *Journal of the Learning Sciences*, 24(3), 1-46.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41, 169–202.
- Jacobs, J. K., Yoshida, M., Stigler, J. W., & Fernandez, C. (1997). Japanese and American teachers
- Kazemi, E., & Franke, M. L. (2004). Teacher learning in mathematics Using student work to promote collective inquiry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7, 203–235.
- Koellner, K., Jacobs, J., & Borko, H. (2011). Mathematics professional development Critical features for developing leadership skills and building teachers' capacity. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13, 115–136.
- Lave, J. (1996). Teaching, as learning, in practice. *Mind, Culture, and Activity*, 3, 149-164.
- Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning Legitimate peripheral participation*. Cambridge, UK Cambridge University Press.
- Little, J. (2003). Inside teacher community Representations of classroom practice. *Teachers College Record*, 105, 913-945.
- Linder, S. M. (2011). The facilitator's role in elementary mathematics professional development. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13(2), 44–66.
- McIntosh, A.; Reys, B. y Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.
- Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012). *Programas de estudios de Matemática*. San José Autor.
- Programa Estado de la Nación (PEN, 2015). *Quinto informe estado de la educación*. San José C.R Servicios Gráficos, A. C.
- Miyake, N., & Kirschner, P. A. (2014). The social and interactive dimensions of collaborative learning. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 418-438). New York, NY Cambridge University Press.
-
-



- Obando Zapata, G. & Vásquez Lasprilla, N. (octubre, 2008). Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica. Trabajo presentado en el 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Valledupar, Colombia. Resumen recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/933/1/1Cursos.pdf>
- Pérez Campanero, M. P. (1994). Cómo detectar las necesidades de intervención socio-educativa. (2da. edición). Madrid Narcea, S.A. de Ediciones.
- Programa Estado de la Nación (PEN, 2017). Sexto informe estado de la educación. San José C.R Servicios Gráficos, A. C.
- Putnam, R. T., & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning?. *Educational Researcher*, 29(1), 4-15.
- Sandín Esteban, M. P. (2003). *Investigación Cualitativa en Educación. Fundamentos y Tradiciones*. Madrid Mc Graw-Hill Interamericana de España.
- Sawyer, R. K. (2006). Introduction. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp.1-16). New York, NY Cambridge University Press.
- Sawyer, R. K. (2014). The new science of learning. In R.K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (2nd ed.). New York, NY Cambridge University Press.
- Sherin, M. G., Linsenmeier, K. A., & van Es, E. A. (2009). Selecting video clips to promote mathematics teachers' discussion of student thinking. *Journal of Teacher Education*, 60, 213–230.
- Spillane, J. P., Reiser, B., & Gomez, L. M. (2006). Policy implementation and cognition The role of human, social, and distributed cognition in framing policy implementation. In M. I. Honig (Ed.), *New directions in educational policy implementation* (pp. 47-64). Albany, NY State University of New York Press.
- Tsao, Y. L. (2004). Exploring the connections among number sense, mental computation performance, and the written computation performance of elementary preservice school teachers. *Journal of College Teaching & Learning*, 1(12), 71-90.
-
-



- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.
- van Es, E. A., Tunney, J., Goldsmith, L. T., & Seago, N. (2014). A framework for the facilitation of teachers' analysis of videos. *Journal of Teacher Education*, 65, 340–356.
- Wayne, A. J., Yoon, K. S., Zhu, P., Cronen, S., & Garet, M. S. (2008). Experimenting with teacher professional development Motives and methods. *Educational Researcher*, 37, 469-479.
- Wenger, E. (1998). *Communities of practice Learning, meaning, and identity*. New York, NY Cambridge University Press.
- Wenger, E., McDermott, R. A., & Snyder, W. (2002). *Cultivating communities of practice A guide to managing knowledge*. Boston, MA Harvard Business Press.
- Yang, D. C., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(2), 383-403.

XI. Anexos
