UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
INSTITUTO DE INVESTIGACION PARA
EL MEJORAMIENTO DE LA
EDUCACION COSTARRICENSE

UNIVERSIDAD NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y
NATURALES

CONSEJO NACIONAL PARA INVESTIGACIONES CIENTIFICAS Y TECNOLOGICAS
CONICIT

PLAN PILOTO PARA EL MEJORAMIENTO DE
LA ENSEÑANZA DE LA CIENCIA Y LA MATEMATICA

EXPERIENCIAS DIDACTICAS MATEMATICA

GEOMETRIA

Violeta Brenes Castro
Mario Murillo Chaves
Ana Lía Quesada Solano

ALGEBRA INTUITIVA

Violeta Brenes Castro
Mario Murillo Chaves

1995

EL PODER VISUALIZADOR DE LA

GEOMETRIA

PLAN PILOTO PARA EL MEJORAMIENTO

DE LA ENSEÑANZA

DE LA MATEMATICA Y LAS CIENCIAS

UNA - UCR - CONICIT

VIOLETA BRENES CASTRO

MARIO MURILLO CHAVES

ANA LÍA QUESADA SOLANO

Editor:

Mario Murillo Chaves

PRESENTACION

En 1990 por iniciativa conjunta del Instituto de Investigación para el Mejoramiento de la Educación Costarricense (IIMEC) de la Universidad de Costa Rica y de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional, se presentó, ante el Consejo Nacional para Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICIT), el proyecto de investigación "Plan piloto para el mejoramiento en la enseñanza de las Ciencias y la Matemática", el cual busca promover el desarrollo de formas innovadoras en el aprendizaje y la enseñanza de las diferentes áreas de las Ciencias Naturales y la Matemática.

El proyecto fue aprobado por el CONICIT y cofinanciado con fondos del préstamo CONICIT-BID y los aportes de la Universidad de Costa Rica y de la Universidad Nacional. Se integró un equipo multidisciplinario con la participación de las Escuelas de Química, Física, Biología y Matemática de ambas universidades, de la Escuela de Formación Docente de la Universidad de Costa Rica y del Centro de Investigación y Docencia (CIDE) de la Universidad Nacional, con la coordinación del IIMEC por la Universidad de Costa Rica y la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales por la Universidad Nacional.

La ejecución del proyecto requirió la colaboración del Ministerio de Educación Pública, mediante la participación de dos instituciones de enseñanza primaria y dos de enseñanza secundaria, representadas en la Escuela República Dominicana (San José), la Escuela José Ezequiel González Vindas (Heredia), el Liceo Rodrigo Facio (San José) y el Liceo Samuel Saénz (Heredia).

El trabajo conjunto de los docentes de las universidades y de las escuelas y colegios involucrados, favoreció el desarrollo de una serie de experiencias innovadoras en la enseñanza aprendizaje en Ciencias Naturales y la Matemática. Algunas de esas experiencias se presentan en esta publicación para compartirlas con la comunidad nacional y en especial con los docentes que, desde sus aulas, se esfuerzan por el logro académico de sus estudiantes.

La culminación de este proyecto fue posible gracias a la confianza y al aporte económico brindado por el Consejo Nacional para Investigaciones Científicas y Tecnológicas, la Universidad de Costa Rica, la Universidad Nacional y el Ministerio de Educación Pública, por lo que los docentes de enseñanza primaria, media y superior participantes, les expresamos nuestro más profundo agradecimiento a esas entidades y en especial, al CONICIT, por su interés en que esta publicación fuera posible.

NOTA INTRODUCTORIA

En nuestras clases de matemática, una queja usual de los estudiantes es la incomprensión de las operaciones algebraicas que el profesor realiza en la pizarra y que luego "anima" a los estudiantes a que las repita. Una parte de la dificultad es la falta de un "significado" de lo que se está haciendo, lo que usualmente conduce a la vez al aburrimiento de los estudiantes y a la realización de operaciones sin sentido.

Es posible subsanar algunos de estos males si a las operaciones algebraicas se les dota, por lo menos inicialmente, de un significado. Se ha encontrado que algunas figuras geométricas tienen el potencial de hacer significativo algunos elementos del álgebra básica, como lo son la suma y la resta de términos semejantes, el desarrollo de algunas identidades, factorizaciones simples de trinomios cuadráticos, y otros temas.

Con este fascículo presentamos algunas ideas que relacionan la geometría con el álgebra, para que el profesor cuente con materiales que hagan más significativa las clases de esta área de la matemática. Corresponde a un material recopilado de varias fuentes, puesto en un solo documento, revisado en su redación e ilustraciones, y adaptado. Se ha usado tanto en talleres de capacitación de profesores dentro y fuera del país, como en el marco del Plan Piloto para el Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias. Este Plan Piloto buscó, en los años en que estuvo en ejecución, proveer a quienes estuvieron involucrados en el mismo, de actividades que contribuyeran a hacer no sólo agradable el aprendizaje, sino de hacerlo también significativo. Confiamos, pues, en la utilidad y provecho que pueda obtener el lector.

Los Autores

INDICE

I

LOS PRIMEROS CONCEPTOS DEL ALGEBRA VISUALIZADOS GEOMETRICAMENTE

Algunos conceptos básicos del Algebra pueden presentarse en forma sumamente abstracta a los alumnos y ésta puede ser la causa de gran parte de los errores en que incurren en el desarrollo de la misma. Es usual que confundan $2x$ con x^2 y decir así que $x+x = x^2$, mientras que $x \cdot x = 2x$. Estos errores se podrían superar en gran medida si recurrimos al apoyo geométrico al introducir estos conceptos. Así, la expresión x^2 sería el área de un cuadrado de lado x, mientras que x sería el área de un rectángulo de base 1 y altura x.

De ese modo, y utilizando el concepto intuitivo de suma que nos indica agregar o reunir, tendríamos que $x+x = 2x$, ya que el área de un rectángulo de base 1 y altura x, unido al área de otro rectángulo de base 1 y altura x, sería el área de un nuevo rectángulo de base 2 y altura x (figura 1). Mientras que, siendo el área de un cuadrado "*lado por lado*", si este cuadrado tiene un lado de longitud x, su área sería x^2 o sea $x \cdot x = x^2$ (figura 2).

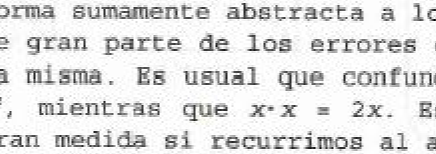


FIGURA 1

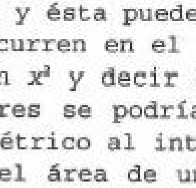


FIGURA 2

Al darle un contenido geométrico a expresiones como $5x$, $6x^2$ y $3xy$, por ejemplo, esto nos facilitará luego la explicación de las operaciones con expresiones algebraicas.

A las anteriores expresiones les podríamos dar los siguientes contenidos geométricos: $5x$ podría ser el área de un rectángulo de base 5 y altura x (figura 3); $6x^2$ podría ser el volumen de un prisma cuya base es un cuadrado de lado x y su altura es 6 (figura 4); $3xy$ podría ser el volumen de un paralelepípedo de dimensiones 3, x, y y, respectivamente (figura 5).

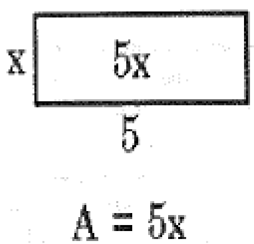


Figura 3

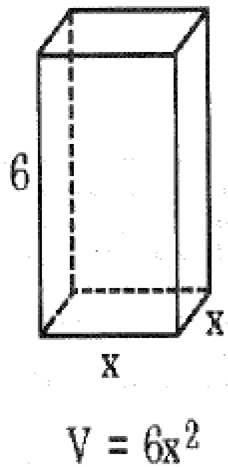


Figura 4

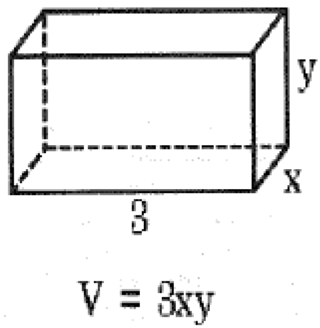


Figura 5

Con el significado dado a las expresiones algebraicas del ejemplo y a otras similares, se podría ilustrar la suma y resta de los llamados términos semejantes.

Es probable que la mayoría de los educadores que enseñan Matemática en la Enseñanza Media y en la Superior, hemos experimentado que, con mucha frecuencia, los alumnos cometen errores como: $5x^2 + 8x^2 = 13x^4$; $6x + 5y = 11xy$, entre otros. Es difícil convencerlos de que están equivocados si nos quedamos sólo con la aclaración abstracta, que suele ser mecanicista y poco convincente. Usando el material geométrico veremos que es más natural convencerlos de su error y llevarlo, en consecuencia, al resultado correcto. Como $5x^2$ representa el volumen de un prisma de base cuadrada de área x^2 y altura 5, $8x^2$ sería el volumen de otro prisma de área de la base x^2 y altura 8. Usando de nuevo la noción fundamental de adición que implica añadir, poner un prisma sobre otro resulta muy natural y $5x^2 + 8x^2$ se representaría tal y como aparece en la figura 6, o sea, como el volumen de un prisma de base cuadrada de área x^2 y altura (5+8); o sea, de volumen $13x^2$.

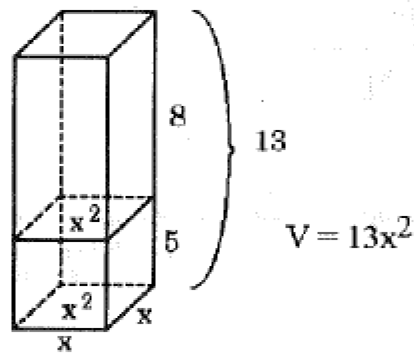
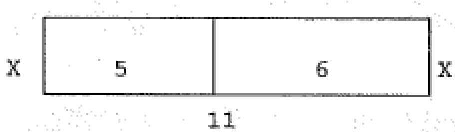


Figura 6

Ahora el alumno aceptará que $5x^2 + 8x^2 = 13x^2$, tal vez sin discusión, ya que lo puede "observar" y comprobar sin lugar a dudas.

De manera similar se les puede convencer de que $5x + 6x = 11x$; recordando que $5x$ sería el área de un rectángulo de base 5 y altura x y que $6x$ sería el área de un rectángulo de base 6 y altura x, entonces $5x + 6x$ sería añadir al área del primer rectángulo la del segundo, con lo que se tiene un nuevo rectángulo de base 11 y altura x, cuya área sería, indudablemente, $11x$, tal y como se observa en la figura 7.



$5x + 6x = 11x$

Figura 7

En este momento podemos evidenciar que $6x + 5y$, con $x \neq y$, no se puede expresar como un monomio, ya que $6x$ sería el área de un rectángulo de base 6 y altura x; $5y$ sería el área de un rectángulo de base 5 y altura y; como ambas alturas son diferentes, $6x+5y$ se representaría de alguna de las dos maneras que se observan en la figura 8

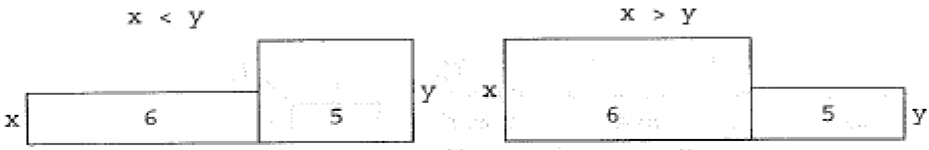


Figura 8

y por tanto, en ambos casos, $6x + 5y$ no se puede representar como el área de un sólo rectángulo y debe quedar expresada como la suma de las áreas de los dos rectángulos, es decir: $6x + 5y$.

Un error que usualmente los estudiantes cometen al sumar $6x + 5y$, es afirmar que esta suma es igual a $11xy$. Para convencerlos de su equivocación podemos representar $6x$ como el volumen de un paralelepípedo con una base de área $6x$ y altura 1, $5y$ como el volumen de un paralelepípedo de área de la base $5y$ y altura 1, y $11xy$ como un paralelepípedo de área de la base $11x$ y altura y, y suponiendo $x > y$, tendríamos $6x + 5y \neq 11xy$, tal y como se observa en la figura 9.

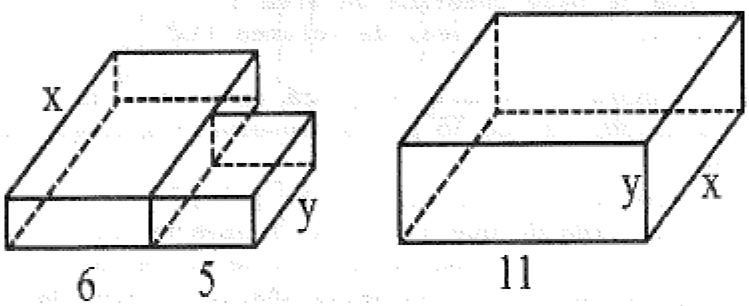


Figura 9

Aceptando que restar una figura de otra es sobreponer una sobre la otra (o cubrir una con la otra) y considerar lo que queda descubierto, podemos garantizar que $6x - 2x = 4x$, como se puede observar en la figura 10.

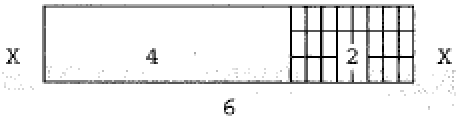


Figura 10

Verificamos que $6x-2y$, $x > y$, no puede expresarse como un monomio, ya que, como puede observarse en la figura 11, el área que queda descubierta no es la de un rectángulo.

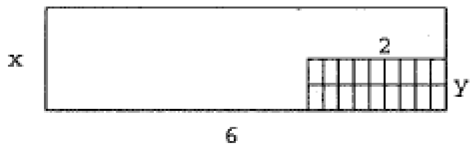


Figura 11

Después de trabajar con unos ejemplos más utilizando el material geométrico, el profesor puede entonces dar la regla para sumar o restar términos semejantes, seguro de que ahora el alumno sí la aceptará e interiorizará debidamente.

Al presentar actividades como ésta, es necesario que el profesor tenga presente sus limitaciones. En la resta por ejemplo, el coeficiente del minuendo siempre debe ser mayor al del sustraendo, pues de lo contrario el resultado sería un número negativo y no tendría significado geométrico, a menos que se establezca un convencionalismo apropiado. Además al representar $6x-2y$, se necesita $x > y$, pues de lo contrario se prestaría a confusión. Sin embargo, luego de establecer la regla general, puede hacer notar a sus alumnos que estas limitaciones ya no tienen razón de ser y esto le ayudará a que ellos comprendan la excelencia de establecer generalidades que cubran muchos tipos de situaciones.

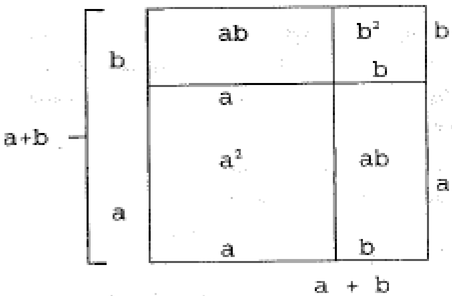
II

DEMOSTRACIONES GEOMETRICAS DE ALGUNAS IDENTIDADES

Estudiaremos primero los productos: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ y $(a+b)\bullet(a-b)$. Para ello basta conocer las fórmulas del área del cuadrado y del rectángulo para comprender las demostraciones geométricas de los mismos.

a) Desarrollo del producto: $(a+b)^2$

Para visualizar la identidad correspondiente, partimos de la figura 1:



$A = (a+b)^2$

$A = a^2 + 2ab + b^2$

Por lo tanto:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Figura 1

Se hace ver que el área total del cuadrado se puede obtener de dos maneras: 1) aplicando simplemente la fórmula del área del cuadrado, que en este caso mide de lado $a+b$, y 2) como la suma de las áreas de las figuras que lo componen. Como en ambos casos se refiere a lo mismo, obtenemos la identidad buscada. Es decir: El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo; o sea:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

b) Desarrollo del producto:

$(a-b)^2$:

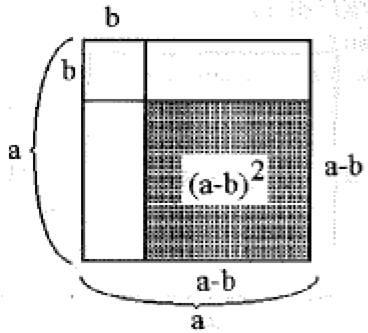


Figura 2

Para visualizar la identidad que corresponde a $(a-b)^2$, partimos de la figura de la derecha (Figura 2), haciendo énfasis en que el área de la sección sombreada es $(a-b)^2$.

Ahora bien, se pregunta cómo se puede obtener esa misma área a partir del cuadrado de lado a (Area = a^2).

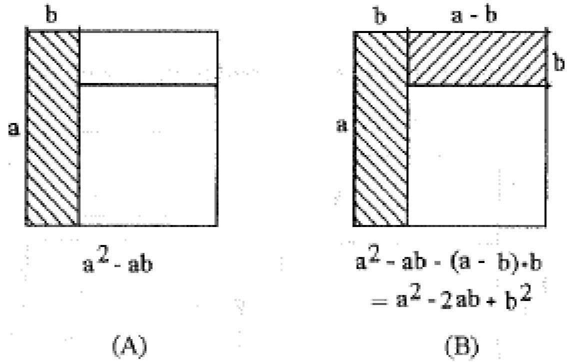


Figura 3.

Primeramente, al cuadrado de lado a le suprimimos un rectángulo de largo a y ancho b (Figura 3A, con rayado \\\\). Luego le suprimimos un rectángulo de largo $a-b$ y ancho b (Figura 3B, con rayado ////). Este rectángulo es de área $(a-b)\bullet b = ab-b^2$. Obsérvese que el área "en blanco" que queda es de área $a^2 - 2ab + b^2$, pero a la vez es equivalente al área rayada en la Figura 2, por lo que podemos escribir:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

c) Desarrollo del producto $(a+b)\bullet(a-b)$

Para este caso, partamos del cuadrado de lado a y área a^2 (Figura 4A en la siguiente página), recortémosle un cuadrado de lado b y área b^2 (Figura 4B). El área que queda será a^2-b^2 (Figura 4C).

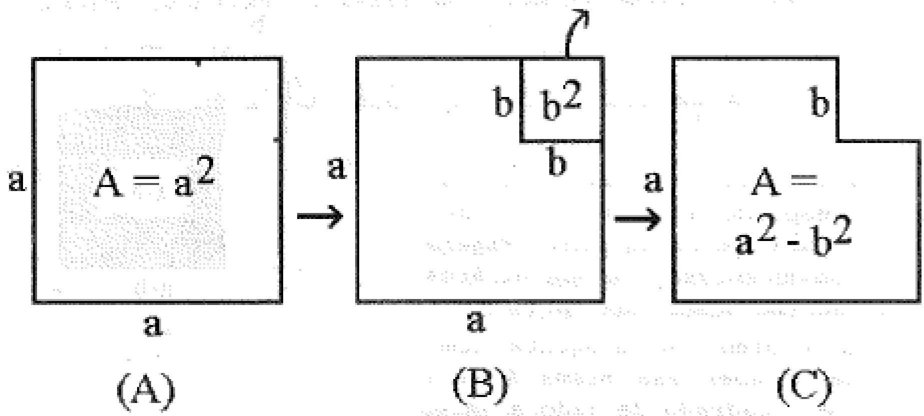


Figura 4

A la figura que queda le recortamos el rectángulo superior y lo trasladamos a la derecha según se muestra en la Figura 5:

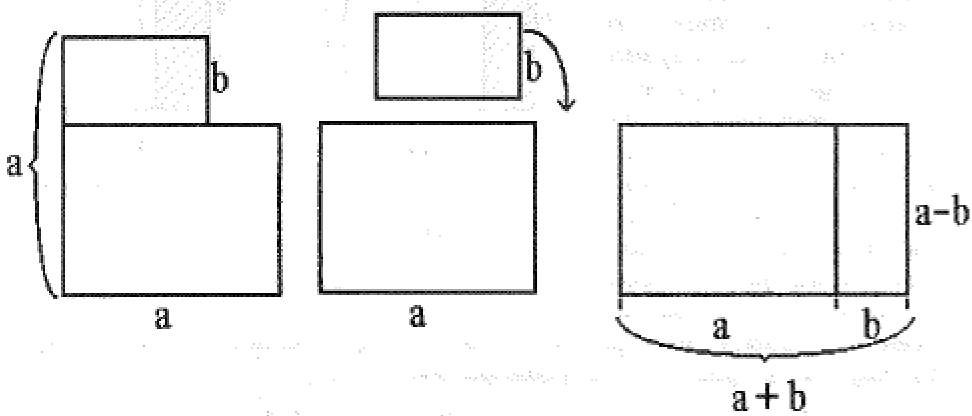


Figura 5

Obsérvese entonces que la figura de área a^2-b^2 quedó "transformada" en un rectángulo de largo (a+b) y de ancho (a-b). Podemos escribir entonces:

$$(a+b) \bullet (a-b) = a^2-b^2$$

Otra manera de comprobar esta identidad es utilizando la figura 6 y observando en ella que $a^2-b^2 = a(a-b) + b(a-b)$. Luego, factorizando $(a-b)$ de la expresión anterior, obtenemos que: $a^2-b^2 = (a-b)\bullet(a+b)$, como queríamos verificar.

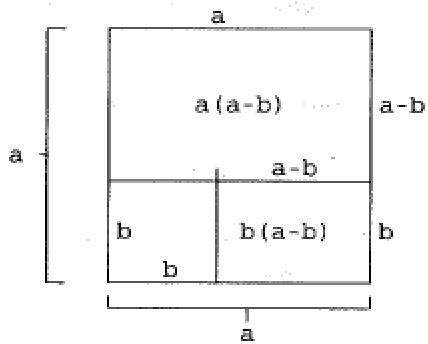


Figura 6

Los procedimientos geométricos desarrollados en las identidades anteriores pueden extenderse para probar identidades un poco más complejas, tales como:

m) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ y

n) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

Para probar la identidad m) seguimos un método similar al utilizado para la primera identidad. Consideremos la figura 7. En esta figura $\square$LMNO es

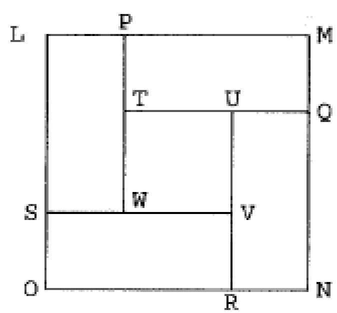


Figura 7

un cuadrado y LP = SW = UQ = RN = PT = MQ = VR = SO. Por tanto □TUVW es un cuadrado y usando la información precedente, podemos escribir la igualdad:

$$(LM)^2 = 4a\square LPWS + a\square PMQT + a\square UQNR + a\square SVRO + a\square TUVW$$

y puesto que las áreas de los cuatro rectángulos son iguales, lo que se puede verificar fácilmente superponiéndolos, tenemos que:

$$(LM)^2 = 4a\square LPWS + a\square TUVW.$$

Ahora, si llamamos PM = a y LP = b entonces LM = $a+b$ y TU = $a-b$, a□LPWS = ab y a□TUVW = $(a-b)^2$, por tanto:

$$(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2$$

o sea:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab,$$

como queríamos demostrar.

La figura 8 es la base para demostrar la identidad n), o sea para demostrar que $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$, sabiendo que: LO = OQ = a; NO = UV = ZY y OP = TV = UZ = b.

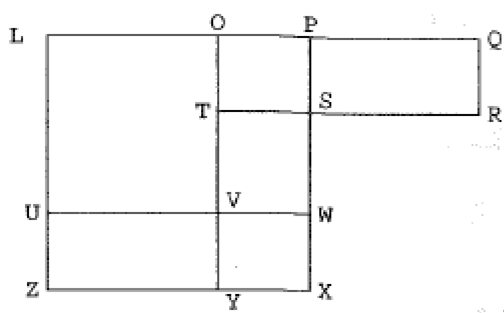


Figura 8

Proponga esta demostración a sus alumnos como ejercicio; les será de gran provecho.

Obsérvese que este tipo de actividades constituyen un excelente ejemplo de cómo puede combinarse la Geometría con el Algebra.

Pasaremos ahora a estudiar las representaciones geométricas de las fórmulas $(a+b)^3$ y $(a-b)^3$.

En estos casos, como en los anteriores estudiados, se persigue que el alumno no se aprenda mecánicamente estas identidades y por supuesto que éstas tengan significado para él. Para realizar esta parte de la actividad, el alumno debe conocer las fórmulas del volumen del cubo y del paralelepípedo. Se utilizarán para la interpretación geométrica de las identidades en cuestión las formas representadas en la Figura 9.

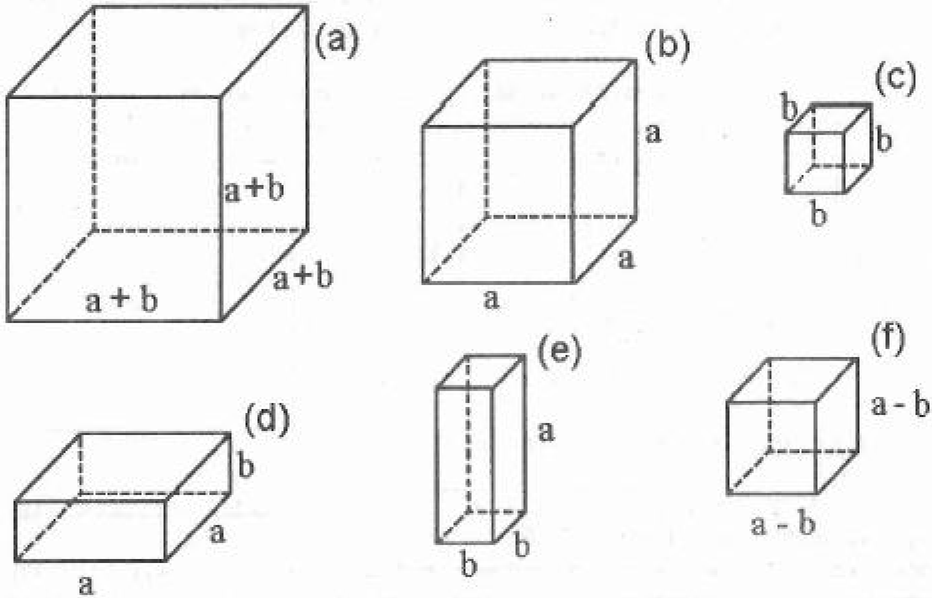


Figura 9

Vamos a utilizar para esta actividad una forma (a), una forma (b), una forma (c), tres (d) y tres (e), para mostrar que:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

En efecto, se puede verificar que el cubo de arista $(a+b)$ y volumen $(a+b)^3$ se puede rellenar con un cubo de arista a, un cubo de arista b, 3 paralelepípedos de base cuadrada a^2 y altura b y 3 paralelepípedos de base cuadrada b^2 y altura a.

La prueba de que $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ se puede comprobar haciendo el siguiente experimento: verifique que la cantidad de arena fina que le cabe al cubo de arista $(a-b)$ más la cantidad de arena que le caben a 3 paralelepípedos de base cuadrada a^2 y altura b, más la cantidad que le cabe al cubo de arista b, es exactamente la misma que le cabe al cubo de arista a y a 3 paralelepípedos de base cuadrada b^2 y altura a, o sea:

> Volumen del cubo de arista $(a-b)$ + volumen de 3 paralelepípedos de base b^2 y altura a + volumen del cubo de arista b = volumen del cubo de arista a + volumen de 3 paralelepípedos de base b^2 y altura a, o sea:

$$(a-b)^3 + 3a^2b + b^3 = a^3 + 3ab^2$$

y esto es equivalente a:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

como queríamos poner en evidencia.

No es necesario insistir en que actividades de este tipo no sólo ayudan eficazmente a los alumnos en su aprendizaje, sino que convierten el ambiente de clase en un lugar ameno y divertido, rompiéndose la monotonía y despertando el interés de los alumnos por la Matemática.

VISUALIZANDO EL CUADRADO DE UN TRINOMIO

El objetivo que se persigue con esta actividad es que el alumno, manipulando las figuras geométricas, constate que las siguientas identidades son ciertas:

1) $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$
2) $(x-y-z)^2 = x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz$
3) $(x+y-z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$
4) $(x-y+z)^2 = x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz$

Vamos a trabajar con las siguientes figuras:

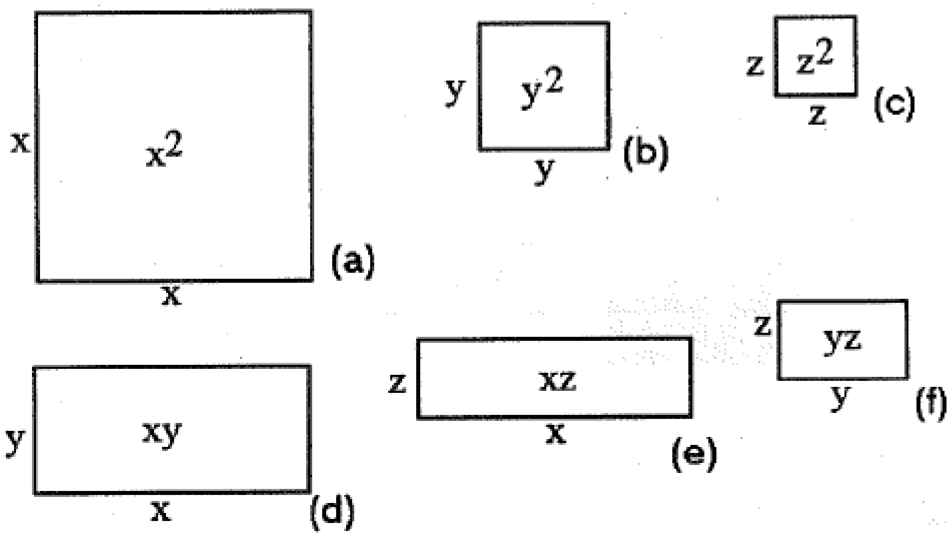


Figura 1

Necesitaremos para la actividad que cada equipo de trabajo cuente con una figura de los tipos (a), (b) y (c) y dos figuras de los tipos (d), (e) y (f).

Sabemos que sumar significa agregar o reunir o yuxtaponer, y que restar significa sobreponer o cubrir. Vamos a suponer que ... $x > y > z$, a fin de que las restas se puedan realizar geométricamente.

Así por ejemplo, para comprobar la identidad 1), es decir:

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz,$$

se les pide a los alumnos que dibujen un cuadrado de lado x+y+z, y que lo cubran con las figuras que se les proporcionaron. Se espera que lleguen a algo como lo que aparece en la figura 2:

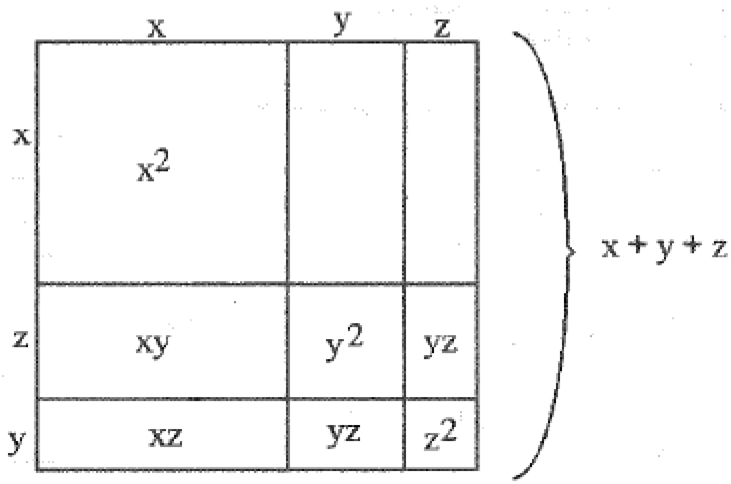


Figura 2

Siguiendo con los ejemplos, para verificar la identidad:

$$(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz,$$

se les pide que traten de acomodar el material que se les entregó, a fin de verificarla. Se les hace notar que no importa de qué miembro de la identidad partan para su demostración geométrica.

Una solución podría ser la siguiente:

Se usan primeramente las figuras correspondientes a x^2 y y^2, formándose la figura siguiente (Figura 3):

Esta figura representa entonces a:

$x^2 + y^2$

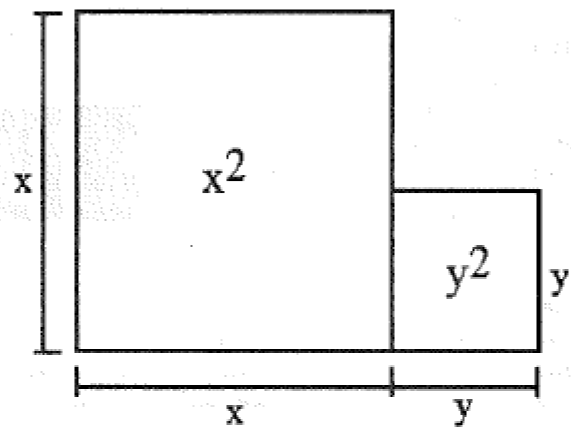


Figura 3

Se usan luego dos figuras xy, con las que se cubre la figura inicial.

La figura muestra, entonces hasta el momento, la igualdad:

$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

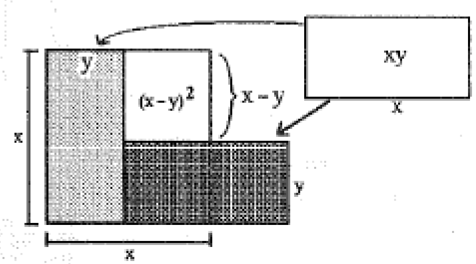


Figura 4

Trabajemos ahora sobre el cuadrado de lado $x-y$. Lo "cubrimos" usando las dos figuras xz, quedando como se muestra en la siguiente figura (Pugura 5):

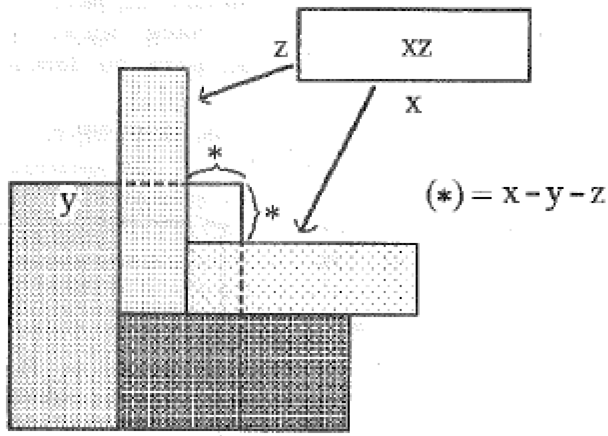


Figura 5

Observemos dos cosas importantes:

1) Del cuadrado original solamente queda sin cubrir un cuadrado de lado $x-y-z$

2) Las figuras xz recién colocadas como están "cubriendo", están restando. Pero hay una parte de ellas que "no están restando de nada" por estar fuera de la figura que ya se había formado. Para compensar esta "resta de nada", usemos las figuras que aún quedan y no se habían usado: dos yz y una z^2. Las colocamos donde corresponde según meustra la figura 6:

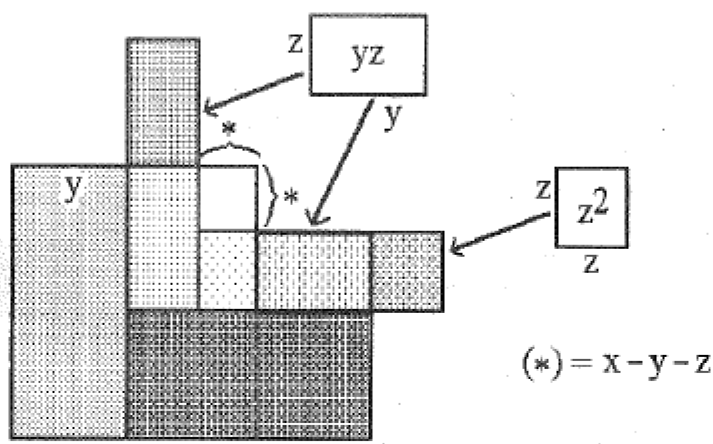


Figura 6

Tenemos entonces ahora, representando lo hecho en los dos últimos pasos, la igualdad a verificar:

$(x - y - z) =$

$x^2 + y^2 - 2xy - 2xz + 2yz + z^2$.

Para verificar $(x+y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz$, una solución posible sería la siguiente: se usan primeramente las formas x^2, y^2 y las dos xy para formar:

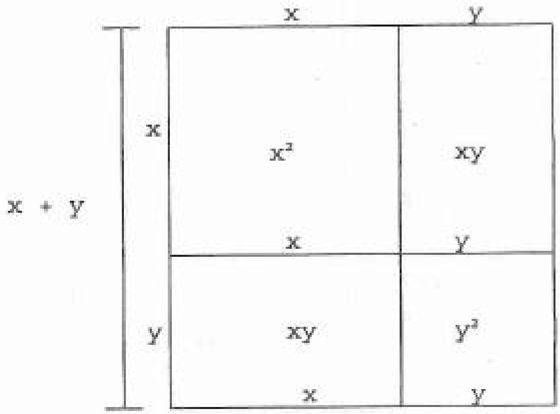
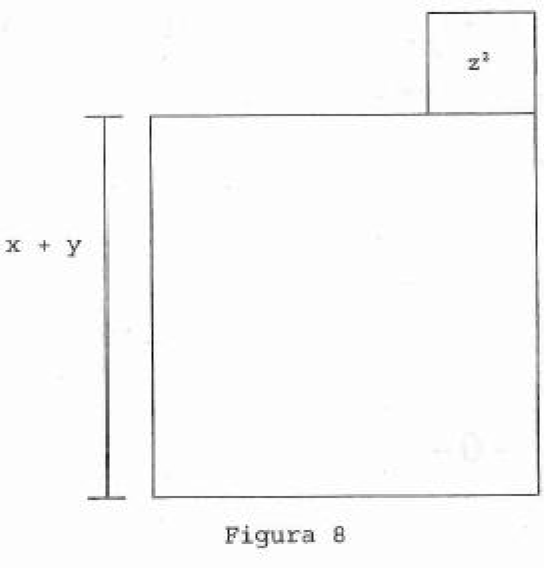


Figura 7

En esta figura tenemos representado $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. A esta figura le adosamos z^2, con lo que tenemos:

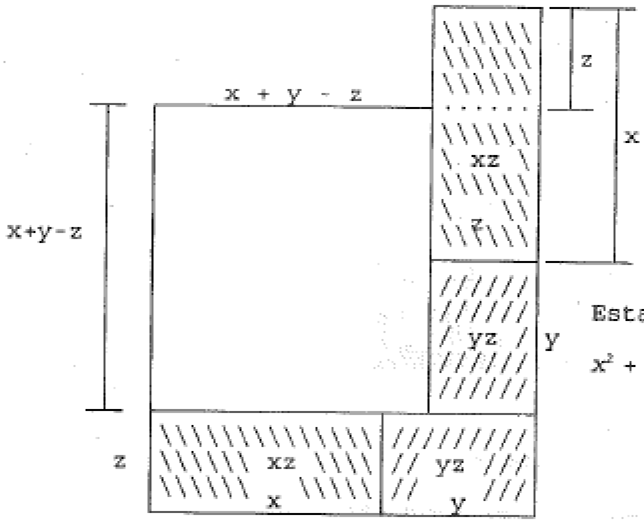


Esta figura representa a

$x^2 + 2xy + y^2 + z^2$

Figura 8

Luego, a esta figura le sobreponemos los rectángulos *xz* y *yz*, según se muestra en la figura 9:



Esta figura representa a

$x^2 + 2xy + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz$

Figura 9

Observe que finalmente queda sin "cubrir" un cuadrado de lado (x + y - z), por lo que se puede escribir:

$$(x+y-z)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz \text{ , o bien:}$$

$$(x+y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz.$$

¿Cómo haría usted para verificar que

$$(x - y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$$

-0-

Verificuemos ahora que:

$$(x - y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$$

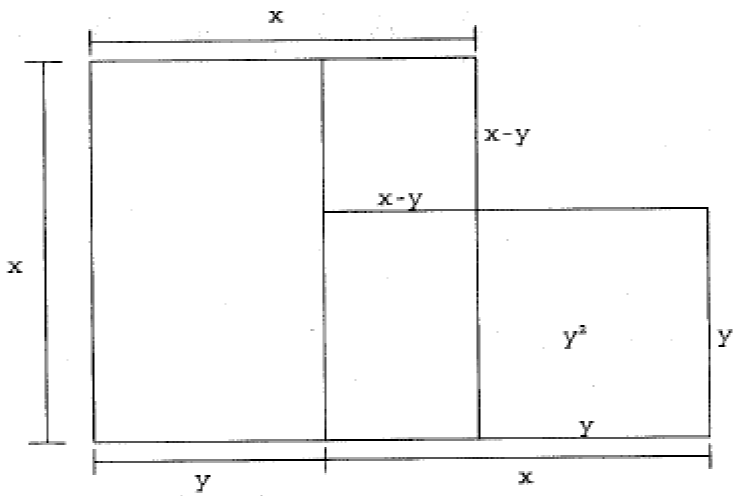


Figura 7

En la figura 7 hemos representado $x^2 + y^2 - 2xy$; por tanto queda un cuadrado de lado $(x-y)$.

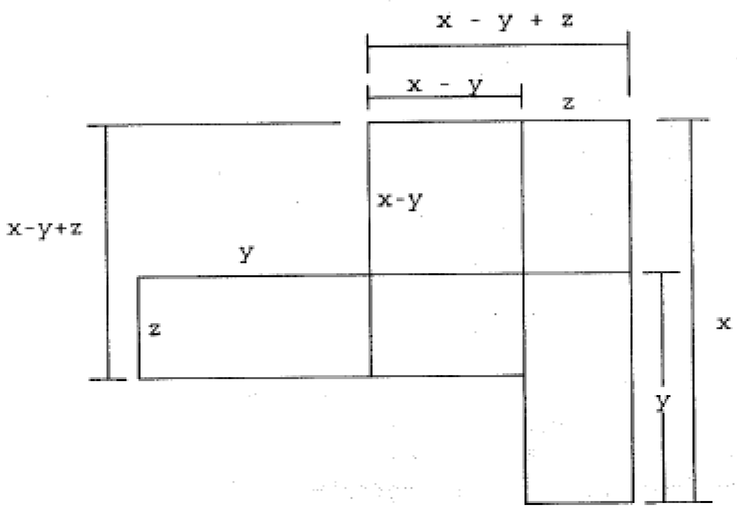


Figura 8

Ahora tenemos $(x-y)^2 + 2xz - 2yz$ y nos quedaría una figura como se observa en la figura 9.

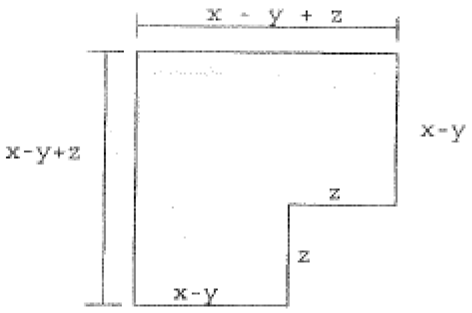


Figura 9

y si le agregamos z^2 obtenemos un cuadrado de lado $(x-y+z)$, tal y como lo vemos en la figura 10:

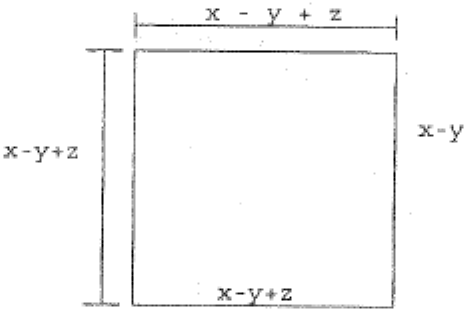


Figura 10

Por tanto:

$$(x-y+z)^2 = (x-y)^2 + 2xz - 2yz + z^2 - x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz.$$

Así quedan justificadas por medio del apoyo geométrico las cuatro situaciones que nos planteamos al inicio.

Es importante notar que las soluciones ilustradas no son únicas. Se podrían presentar otros "acomodamientos" de las figuras que conducen a los mismos resultados, por tanto esta actividad se presta para que los alumnos discutan sus diferentes posiciones.

IV

REPRESENTACION GEOMETRICA

DE LA MULTIPLICACION DE BINOMIOS

Ya hemos visto la ayuda invaluable que la interpretación geométrica presta cuando se enseña Algebra. Además de clarificar los conceptos que se estudian, proporciona un medio que entusiasma a los alumnos y los motiva.

En esta actividad veremos cómo un sencillo diseño geométrico puede ayudar a visualizar la multiplicación de dos binomios. Este diseño lo podemos observar en la figura 1 y será la base para las posteriores presentaciones.

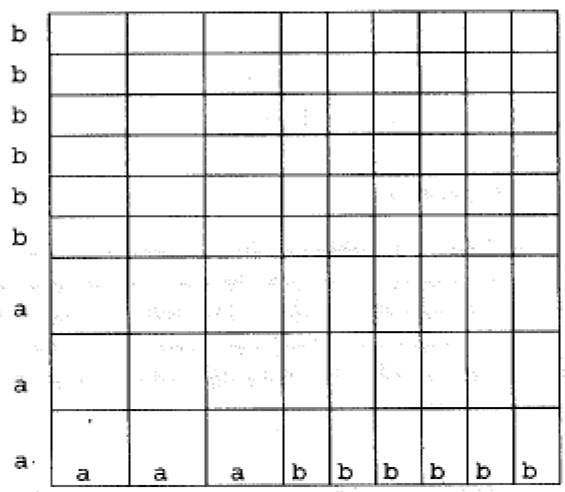


Figura 1

Para visualizar la región comprendida por el rectángulo de dimensiones $(2a+b)$ y $(a+3b)$, cuya área será precisamente $(2a+b)\bullet(a+3b)$, o sea la multiplicación de dos binomios, usamos el diseño anterior y observamos, tal y como se presenta en la fig. 2, que el área del mencionado rectángulo es el resultado de la suma de las siguientes regiones: dos cuadrados de área a^2, 3 cuadrados de área b^2 y 7 rectángulos de área $a{\bullet}b$ y por tanto:

$$(2a+b)(a+3b) = 2a^2 + 3b^2 + 7ab$$

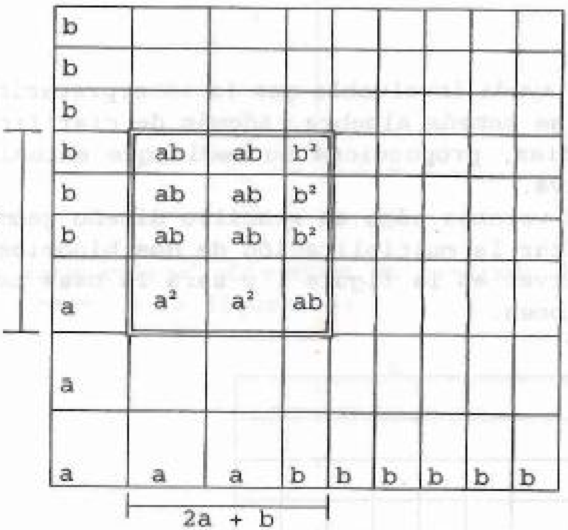


Figura 2

Después de que el alumno ha adquirido confianza utilizando este diseño para efectuar multiplicaciones de binomios que involucren únicamente términos positivos, ellos pueden incursionar en productos de binomios que involucran diferencias. En las figuras 3(a) y 3(b), se muestra el resultado de multiplicar $(a-3b){\bullet}(2a-b)$, siguiendo el siguiente criterio:

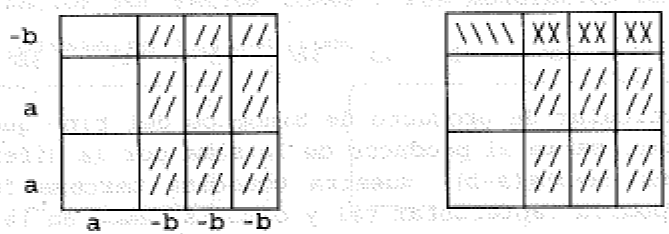
1) Se localiza en el diseño la misma área rectangular como si se tratara de sumas.

2) Se sombrea diagonalmente el área $-3b$, tal y como se observa en la figura 3(a).

3) Se sombrea diagonalmente, y en dirección opuesta, el área $-b$ del segundo factor, tal y como se observa en la figura 3(b).

4) Para escribir el área total se considera positiva el área que quede sin sombrear o la que quede "doblemente sombreada" y se considera negativa el área que quede sombreada diagonalmente en una sola dirección, en uno u otro sentido. Así el producto $(a-3b)\bullet(2a-b)$ sería igual a:

$$2a^2 - 7ab + 3b^2$$



(a) (b)

Figura 3

Puesto que al estudiante este procedimiento podría parecerle una arbitraria mezcla de sumas y restas, se sugiere la siguiente justificación: ya que las áreas que quedan sin sombrear representan el producto de dos cantidades positivas (a y $2a$), éstas deben ser sumadas. Las regiones sombreadas diagonalmente en un solo sentido, son el producto de un término positivo y uno negativo (a y $-b$, $-3b$ y $2a$), por eso se restan. Las regiones "doblemente sombreadas" representan el producto de dos términos negativos ($-3b$ y $-b$), el cual es positivo: $3b^3$, por eso debe sumarse.

Esta técnica puede utilizarse para ilustrar el producto de dos factores, uno que sea la suma de dos términos y otro que sea la diferencia de dos términos.

En la figura 4 (página siguiente) se ilustra el producto $(a+3b)\bullet(2a-b)$

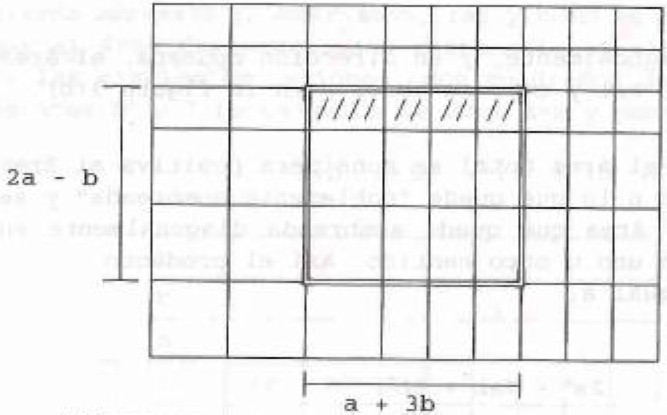


Figura 4

Entonces:

$(a+3b)\bullet(2a-b) = 2a^2 + 6ab - ab - 3b^2 = 2a^2 + 5ab - 3b^2.$

Un caso particular de producto de binomios del tipo que acabamos de presentar, sería el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades $(a+b)\bullet(a-b)$, nuestra conocida tercera fórmula notable, que se podría representar tal y como la vemos en la figura 5.

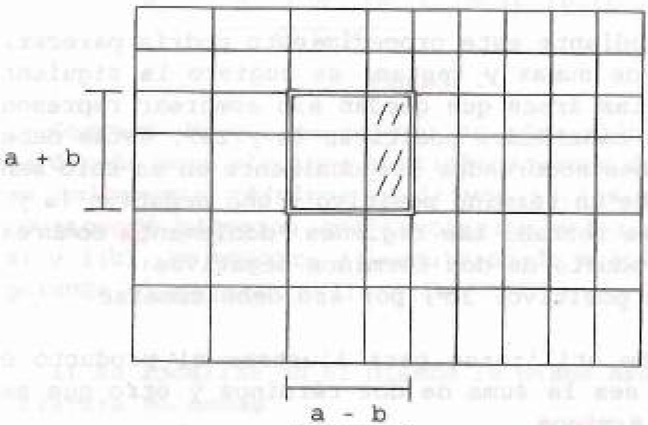


Figura 5.

y por tanto $(a+b)\bullet(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2$ y así tenemos otra alternativa más para verificar este producto notable.

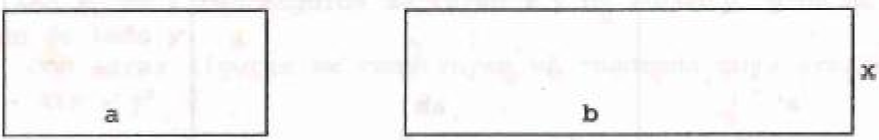
V

GEOMETRIA Y FACTORIZACION

En esta sección, se darán algunas ideas de cómo podemos utilizar la Geometría en la visualización de la factorización, utilizando las figuras geométricas, sus áreas y volúmenes para que el estudiante vaya adquiriendo el concepto de factorización de algunas expresiones algebraicas.

FACTORIZACION POR FACTOR COMUN Y POR AGRUPACION DE TERMINOS

Se presentan figuras como

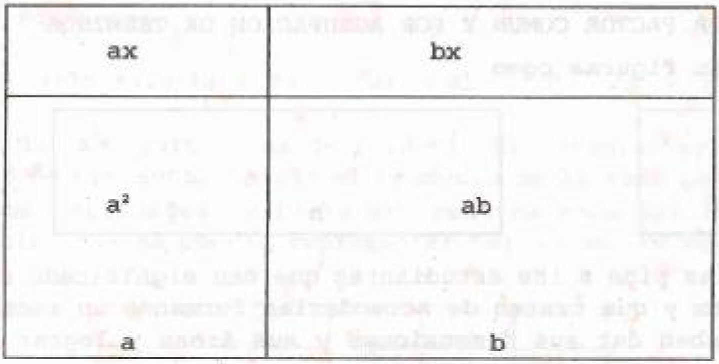


y con ellas se les pide a los estudiantes que den significado a la expresión $ax + bx$ y que traten de acomodarlas formando un rectángulo del cual deben dar sus dimensiones y sus áreas y lograr que obtengan:

Se les pide le den significado geométrico a expresiones como $2x^2 + 6x$ y que formen con ellas un rectángulo y encuentren su área. Podrían obtener diferentes interpretaciones: $2x(x + 3)$ o $x(2x + 6)$, ambas estarían correctas. Si se quiere que obtengan la factorización completa se les guiará a ello.

Se presentan luego figuras sólidas para que formen paralelepípedos, mediante el significado que pueden darle a expresiones como $2x^3 + 4x^2 + 3x$.

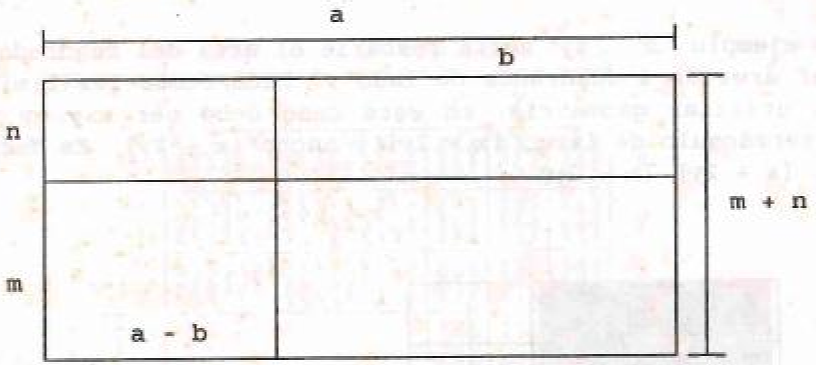
Para la factorización por agrupación podrían presentárseles expresiones como $a^2 + ab + ax + bx$, $am - bm + am - bm$. Con el material en que se encuentran las figuras que tienen como áreas las presentadas en las dos expresiones algebraicas, y pidiendo organicen su material para encontrar áreas de los rectángulos que con ellos formen. En el caso de la resta debe cuidarse que $a>b$ para que se pueda representar geométricamente.



A rect. = (a+b)•(a+x)

Podría agruparlos de diferentes maneras; así se vería cómo unas funcionan y otras no, si es posible formar o no un rectángulo.

En caso de la resta ésta se visualizaría sobreponiendo un área sobre otra, de allí la importancia de tener en cuenta que $a>b$. (siguiente página)

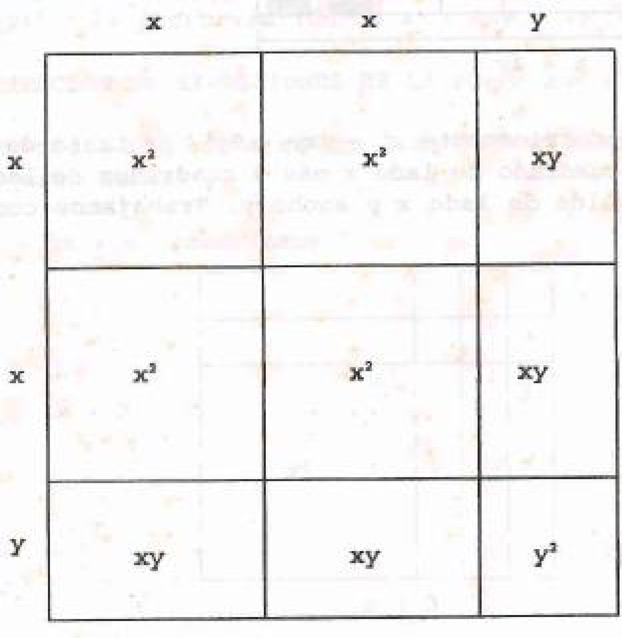


El nuevo rectángulo tiene como área $(a - b)\bullet(m + n)$

FACTORIZACION POR IDENTIDADES ALGEBRAICAS

La expresión $4x^2 + 4xy + y^2$ sería el área de cuatro cuadrados de lado x, de 4 rectángulos de largo x y de ancho y, y de un cuadrado de lado y.

Con estas figuras se construyen un cuadrado cuya área sería $4x^2 + 4xy + y^2$

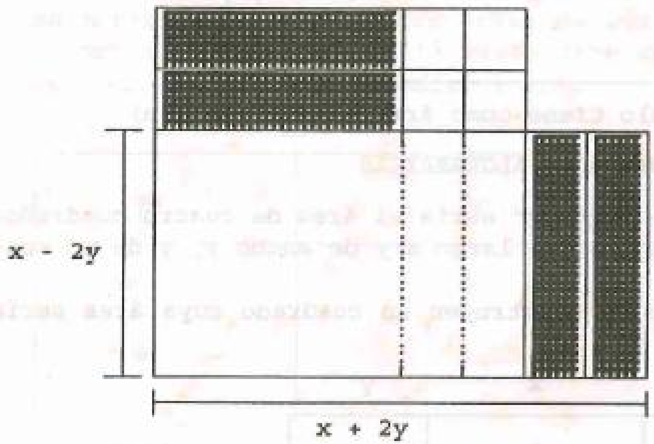


$A = (2x + y)^2$

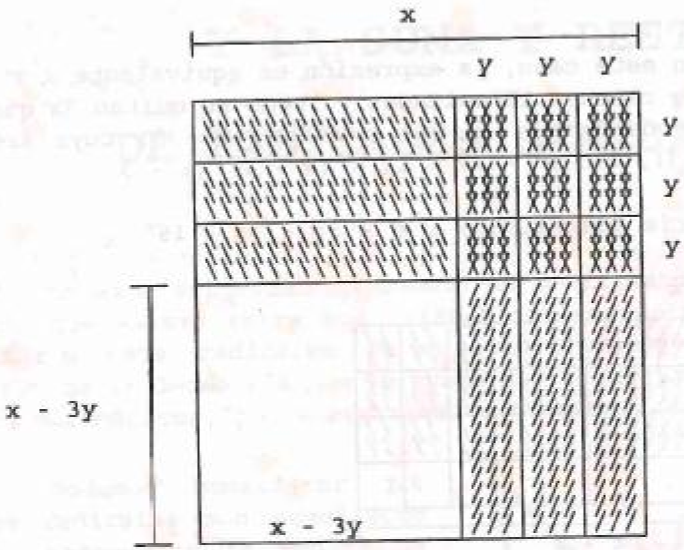
luego:

$4x^2 + 4xy + y^2$
$= (2x + y)^2$

Otro ejemplo: $x^2 - 4y^2$ sería restarle el área del cuadrado de lado x, el área de 4 cuadrados de lado y. Recordemos las limitaciones al utilizar geometría; en este caso debe ser $x>y$, y nos queda un rectángulo de largo $(x + 2y)$ y ancho $(x - 2y)$. Es decir: $x^2 - 4y^2 = (x + 2y)\ (x - 2y)$.



Factoricemos geométricamente $x^2 - 6xy + 9y^2$. Se trata de restarle al área de un cuadrado de lado x más 9 cuadrados de lado y, el área de 6 rectángulos de lado x y ancho y. Trabajamos con las figuras: (Nota $x>y$).

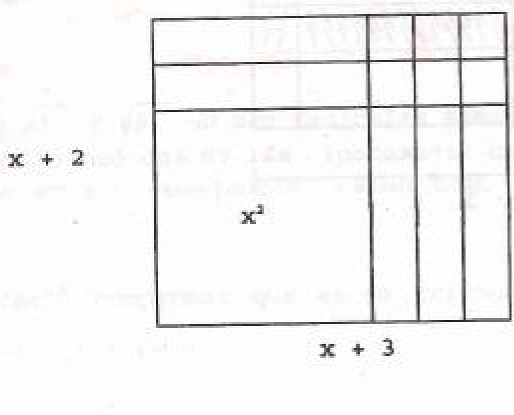


O sea, nos queda un cuadrado de lado $x - 3y$ cuya área sería $(x - 3y)^2$ y la factorización de $x^2 - 6xy + 9y^2 = (x - 3y)^2$.

FACTORIZACION DE EXPRESIONES DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$

En todos los casos se trata de formar rectángulos con $a>0$ con las figuras dadas:

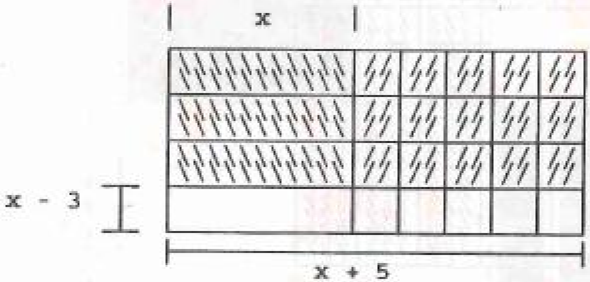
1. $x^2 + 5x + 6$ tendríamos



Es decir: $(x + 3) \bullet (x + 2)$

2. $x^2 - 7x + 12$: en este caso, la expresión es equivalente a $x^2 - 4x + 12 - 3x$; así se reponen 12 unidades y luego se quitan $3x$ quedando un rectángulo de largo $(x - 4)$ y ancho $(x - 3)$ cuya área sería $(x - 4)(x - 3)$, así $x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3)$.

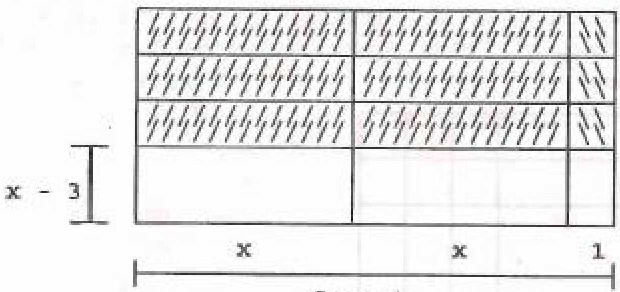
3. $x^2 + 2x - 15$ sería equivalente a $x^2 + 5x - 3x - 15$



Así: $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$

4. $2x^2 - 5x - 3$ tendríamos: $2x^2 - 6x + x - 3$ entonces:

$$2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1) \bullet (x - 3)$$



LOS TRIANGULOS SEMEJANTES Y LA SUMA Y RESTA DE RADICALES SEMEJANTES

En esta actividad se pondrá de manifiesto la estrecha relación que existe entre los triángulos semejantes y la regla para sumar o restar radicales. Es un ejemplo más de cómo, utilizando el apoyo de la Geometría, se le puede dar significado a otros conceptos matemáticos, no necesariamente geométricos.

Podemos considerar que dos radicales son semejantes si representan la medida de las hipotenusas de dos triángulos rectángulos semejantes, así $\sqrt{2}$ y $3\sqrt{2}$ se dicen ser radicales semejantes pues son las medidas de la hipotenusas de los triángulos de la figura 1, los cuales se pueden verificar que son triángulos semejantes.

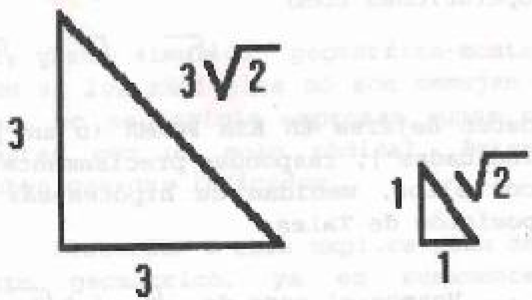


Figura 1

Pero $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ no son radicales semejantes, ya que ellos representan las medidas de las hipotenusas de dos triángulos rectángulos que no son semejantes, tales como los que aparecen en la figura 2.

Es fácil comprobar que estos triángulos no son semejantes, puesto que $1/1 \neq \sqrt{2}/2$.

Por otra parte, si trazamos un segmento que una dos puntos de los lados de un triángulo, de tal forma que este segmento sea paralelo al tercer lado, diremos que el triángulo que se forma está en posición de Tales con respecto al triángulo original. Ahora bien, el hecho de que en operaciones como ...

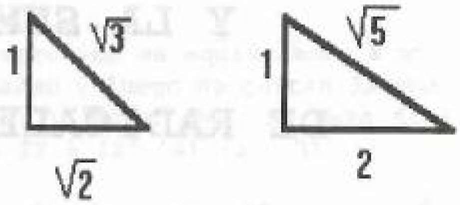


Figura 2

$$\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \ ; \ 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \ ,$$

el resultado puede expresarse como un solo radical, mientras que operaciones como

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} \ \text{y} \ \sqrt{5} - \sqrt{3} \ ,$$

deben dejarse EN ESA FORMA (o en jerga de clase, deben "dejarse indicadas"), responden precisamente al hecho de poder obtener o no con ellos, medidas de hipotenusas de triángulos rectángulos en posición de Tales.

Veamos el caso de $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ y de $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ en las figuras 3 (a) y 3 (b).

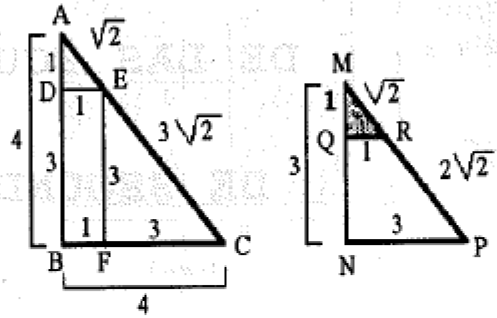
En la figura 3(a) tenemos que:
$\triangle ADE \sim \triangle EFC \sim \triangle ABC$,

y así $\sqrt{2}$ con $3\sqrt{2}$ quedan "alineados", para representar así $4\sqrt{2}$, que es la medida de la hipotenusa del $\triangle ABC$. En la figura 3(b) tenemos que $\triangle MQR \sim \triangle MNP$ y así

$$3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \ ,$$

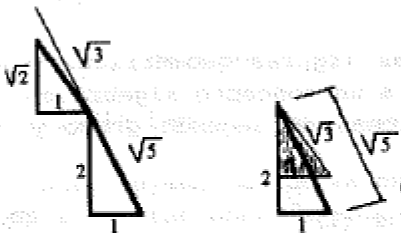
como se observa en los triángulos presentados, que están en posición de Thales.

Veamos ahora qué sucederá con triángulos rectángulos cuyas hipotenusas midan $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ respectivamente; al tratar de "alinearlas" vemos que es imposible obtener triángulos en posición de Tales, como era de esperar (ver figura 4(a) y 4(b)).



(a) **(b)**

Figura 3



(a) (b)

Figura 4

Esto implica geométrica-mente que si los radicales no son semejantes, no es posible expresar sumas o restas con un solo radical, éstas deben que-dar indicadas.

Posterior a esta explica-ción de tipo geométrico, ya es sumamente fácil y factible que el alumno acepte la regla gene-ral que usualmente se le da pa-ra la suma o resta de radicales y comience entonces a aplicarla sin ningún problema ni duda.

VII

RESOLUCION GEOMETRICA DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una vez más vamos a utilizar las figuras geométricas y sus áreas para dar sentido y significado a un concepto algebraico. En esta ocasión trabajaremos con ecuaciones de segundo grado y una incógnita.

Tomemos la ecuación: $x^2 + 10x = 39$ (1).

Dibujemos un cuadrado ABCD (figura 1) y llamemos x a la longitud del lado, entonces el área de este cuadrado será x^2.

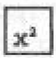


figura 1

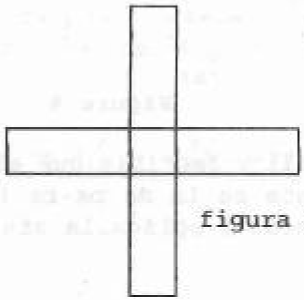


figura 2

Dibujemos ahora alrededor del cuadrado inicial, 4 rectángulos, cada uno de ellos con área 2,5x, tal y como se ven en la figura 2. Por tanto el área de esta figura sería:

$$x^2 + 4(2,5x)^2 = x^2 + 10x,$$

que de acuerdo con la ecuación (1) es 39.

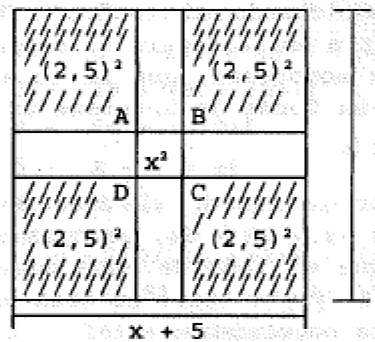


figura 3

Entonces completando la figura 2 hasta obtener un nuevo cuadrado, como se observa en la figura 3, observamos que el área de este nuevo cuadrado es $(x + 5)^2$, pero también sería igual a 39 más el área sombreada, o sea:

$$39 + 4 \cdot (2,5)^2 = 39 + 25 = 64$$

Por lo que obtenemos que:

$$(x + 5)^2 = 64, \text{ o sea: } (x + 5) = \pm 8$$

Por lo tanto: $x = 3$ ó $x = -13$.

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1) comprobamos que ambos son soluciones de esta ecuación.

La completación del cuadrado podría hacerse, también, siguiendo este otro esquema:

De acuerdo a la figura 4, construimos dos rectángulos de lado 5 en dos lados consecutivos del cuadrado original. La figura en forma de L que resulta tiene una área total de $x^2 + 10x$, que de acuerdo con la ecuación (1) es igual a 39.

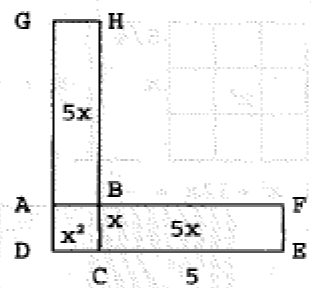


figura 4

Completando el cuadrado DGIE, según se muestra en la figura 5, encontramos que el área sombreada, que se le agrega a la figura en forma de L, tiene un área de $5^2 = 25$.

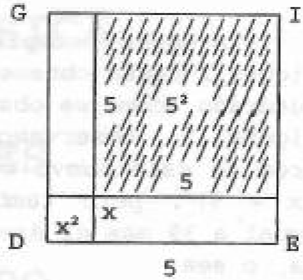


figura 5

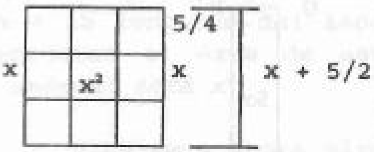
Por lo tanto, el área del cuadrado DGIE es 39 + 25 = 64, pero también observamos que el lado de este nuevo cuadrado es $x + 5$, y por tanto su área es $(x + 5)^2$, entonces concluímos:

$$(x + 5)^2 = 64, \text{ de donde de nuevo } x = 3 \text{ ó } x = -13.$$

Este método de resolver ecuaciones cuadráticas en realidad es muy antiguo, tanto que está basado en teoremas encontrados en "Los Elementos" de Euclides. Sin embargo, el presentárselo a los alumnos es una experiencia muy enriquecedora, que les ayuda a comprender mejor la ecencia de las ecuaciones de este tipo.

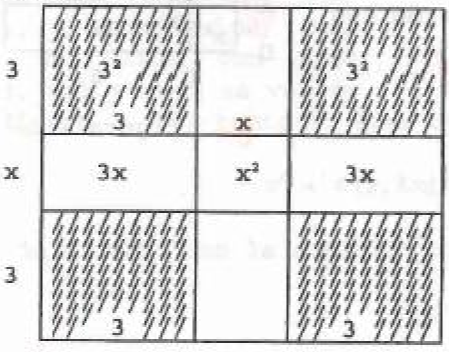
Otros ejemplos:

a) $x^2 + 5x = 6$



1. $x^2 + 4(5/4\ x) = 6$
2. $x^2 + 5x = 6$
3. $A = (x + 5/2)^2 = X^2 + 5X + 25/4$
4. $6 + 25/4 = (X + 5/2)^2$
5. $49/4 = (X + 5/2)^2$
6. $\pm 7/2 = X + 5/2$
7. $x = 1$ ó $x = -6$

b) $x^2 + 12x = -35$



1.- $x^2 + 4(3x) = x^2 + 12x = -35$

2.- $A = (x + 6)^2 = -35 + 36$

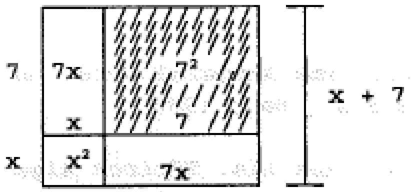
3.- $-35 + 36 = 1$

4.- $(x + 6)^2 = 1$

5.- $x + 6 = \pm 1$

6.- $x = -5$ ó $x = -7$

c) $x^2 + 14x = 15$



1.- $x^2 + 2(7x) + 49$

2.- $x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2$

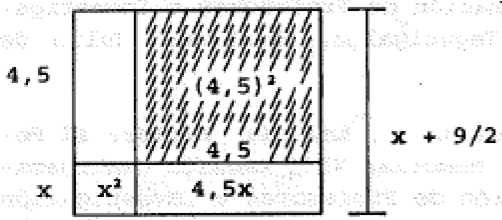
3.- $15 + 49 = (x+7)^2$

4.- $64 = (x+7)^2$

5.- $x + 7 = \pm 8$

6.- $x = 1$ ó $x = -15$

d) $x^2 + 9x = 22$



1.- $x^2 + 2(9/2\,x) + 81/4 = (x+9/2)^2$

2.- $22 + 81/4 = (x+9/2)^2$

3.- $169/4 = (x+9/2)^2$

4.- $x+9/2 = \pm 13/2$

5.- $x = 2$ ó $x = -1$.

BIBLIOGRAFÍA

1.- Angle S., Nancy; Jurasek, Bill. ***The Binomial Grid***. En: Mathematics Teacher. Págs. 337 a 339. U.S.A., Mayo 1986.

2.- Brenes C., Violeta; Quesada S., Ana Lía. ***Tópicos Algebraicos Visualizados Geométricamente***. Memorias V Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Tegucigalpa, Honduras. Julio de 1991. Págs. 89-93.

3.- Brenes C., Violeta; Quesada S., Ana Lía. ***Taller: El Poder Visualizador de la Geometría***. Memorias VIII Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. San José, Costa Rica, Agosto de 1994.

4.- Flax, Rosabel. ***A Squeeze Play on Quadratic Equations***. En: Mathematics Teacher, Págs. 132-134. U.S.A., Febrero 1982.

5.- Horak M., Virginia; Horak J., Willis. ***Geometric Proofs of Algebraic Identities***. En: Mathematics Teacher, Págs. 212 a 216. U.S.A., Mayo de 1981.

Impreso por el Programa de Publicaciones e
Impresiones de la Universidad Nacional,
en el mes de abril de 1996, bajo la Dirección
de Maximiliano García Villalobos.

Autorizado por la Oficina de Transferencia Tecnológica
y de Prestación de Servicios de la Universidad Nacional.

La edición consta de 300 ejemplares en papel bond
y cartulina barnizable.

960455—P.UNA

MODULO DE

ALGEBRA INTUITIVA

PLAN PILOTO PARA EL MEJORAMIENTO
DE LA ENSEÑANZA
DE LAS CIENCIAS Y LA MATEMATICA

UNA - UCR - CONICIT

Traducido, adaptado y editado por:

VIOLETA BRENES C.

Y

MARIO MURILLO CH.

Original del Inglés:

Wheathey Grayson, Yackel Erna y Hichman Judy.
MAPS PLUS: Mathematics achievement through problem.
Florida State University.

PRESENTACION

En 1990 por iniciativa conjunta del Instituto de Investigación para el Mejoramiento de la Educación Costarricense (IIMEC) de la Universidad de Costa Rica y de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional, se presentó, ante el Consejo Nacional para Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICIT), el proyecto de investigación "Plan piloto para el mejoramiento en la enseñanza de las Ciencias y la Matemática", el cual busca promover el desarrollo de formas innovadoras en el aprendizaje y la enseñanza de las diferentes áreas de las Ciencias Naturales y la Matemática.

El proyecto fue aprobado por el CONICIT y cofinanciado con fondos del préstamo CONICIT-BID y los aportes de la Universidad de Costa Rica y de la Universidad Nacional. Se integró un equipo multidisciplinario con la participación de las Escuelas de Química, Física, Biología y Matemática de ambas universidades, de la Escuela de Formación Docente de la Universidad de Costa Rica y del Centro de Investigación y Docencia (CIDE) de la Universidad Nacional, con la coordinación del IIMEC por la Universidad de Costa Rica y la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales por la Universidad Nacional.

La ejecución del proyecto requirió la colaboración del Ministerio de Educación Pública, mediante la participación de dos instituciones de enseñanza primaria y dos de enseñanza secundaria, representadas en la Escuela República Dominicana (San José), la Escuela José Ezequiel González Vindas (Heredia), el Liceo Rodrigo Facio (San José) y el Liceo Samuel Saénz (Heredia).

El trabajo conjunto de los docentes de las universidades y de las escuelas y colegios involucrados, favoreció el desarrollo de una serie de experiencias innovadoras en la enseñanza aprendizaje en Ciencias Naturales y la Matemática. Algunas de esas experiencias se presentan en esta publicación para compartirlas con la comunidad nacional y en especial con los docentes que, desde sus aulas, se esfuerzan por el logro académico de sus estudiantes.

La culminación de este proyecto fue posible gracias a la confianza y al aporte económico brindado por el Consejo Nacional para Investigaciones Científicas y Tecnológicas, la Universidad de Costa Rica, la Universidad Nacional y el Ministerio de Educación Pública, por lo que los docentes de enseñanza primaria, media y superior participantes, les expresamos nuestro más profundo agradecimiento a esas entidades y en especial, al CONICIT, por su interés en que esta publicación fuera posible.

NOTA INTRODUCTORIA

Uno de los pasos más difíciles en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es la transición de la aritmética al álgebra, dificultad aumentada muchas veces por la aridez de la presentación hecha en clase. Sin embargo, siempre es posible encontrar caminos alternos para hacer más agradable y comprensible esta transición. El material que aquí presentamos tiene esa intención. Puede ser usado en partes o en su totalidad. Fue puesto en práctica en colegios del área central en el marco del Plan Piloto para el Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias. Este Plan Piloto buscó, en los años en que estuvo en ejecución, proveer a los profesores involucrados en el mismo de actividades que contribuyeran no sólo a hacer agradable el aprendizaje, sino también que permitieran a los estudiantes construir los conceptos que debían estudiar. Este módulo de Álgebra Intuitiva busca involucrar al alumno en la construcción de generalizaciones, dotándolas de significado. En esta unidad el estudiante tendrá la oportunidad de hacer generalizaciones y expresarlas simbólicamente. El concepto de variable es una de las ideas más importantes en la Matemática y es el objetivo central de este módulo.

Los objetivos de esta unidad son:

1) Desarrollar un concepto de variable.
2) Dado un patrón geométrico, reconocerlo y expresarlo simbólicamente.
3) Reconocer un patrón en una regla matemática o en una secuencia y expresarlo simbólicamente.
4) Resolver una variedad de ecuaciones intuitivamente.

Estas actividades están diseñadas para ayudar a los estudiantes a ver, expresar y registrar patrones. No debe apresurarse al estudiante en este tipo de actividades. Es importante hacer notar que establecer patrones toma su tiempo. Un primer paso para lograr contar con estudiantes que establezcan patrones, es lograr que dibujen la forma que sigue a varias de una sucesión. El segundo paso es que los alumnos describan sus patrones, es decir, que digan con sus propias palabras la relación que encontraron. Pídales también que describan patrones y que el resto de los estudiantes los dibujen.

El tercer paso es que los estudiantes registren sus patrones, primero con palabras y luego simbólicamente

¿CUAL ES MI REGLA?

Esta actividad podría realizarse a través de todo el año en períodos cortos. La meta es descubrir el patrón numérico, las relaciones y el significado de la variable. El profesor dirige esta actividad con la clase entera.

Ejemplo de lo que podría ser una sesión:

Maestro: Pienso una regla. Usted puede escoger un número y yo le digo lo que mi regla hace con ese número. Si usted cree que ya adivinó mi regla, no lo diga en voz alta, levante la mano y diga "regla ". Yo le doy entonces un número y usted me dice cómo la regla transforma a ese número. Yo le diré si está o no en lo correcto. ¿Listo? Ya tengo mi regla, deme un número.

Estudiante 1: 8 Maestro :16
Estudiante 2: 5 Maestro :10
Estudiante 3: 20 Maestro :40
Estudiante 4: ¡Regla! Maestro: 12 Estudiante 4: 24
Maestro: Sí, eso es lo que mi regla hace.
Estudiante 5: ¡Regla! Maestro: 3 Estudiante 5: 9
Maestro: No, mi regla dice 6
Estudiante 6: 4 Maestro: 8 , etc.

Conforme los estudiantes le dan sus números, el profesor los irá escribiendo en la pizarra. Podría dibujar una flecha del número a la respuesta. La pizarra de esta sesión luciría así:

8 -------> 16
5 -------> 10
20 -------> 40
12 -------> 24
3 -------> 6
4 -------> 8

Continúe esta actividad hasta que varios estudiantes conozcan la regla; entonces pregunte al primer estudiante que consiguió la regla que le cuente al resto de la clase cómo lo hizo. Pregunte si algún otro estudiante lo pensó de manera diferente. Escriba en la pizarra la regla con palabras. No utilice símbolos todavía.

8 -----> 16; 5 -----> 10; 20 -----> 40, etc. Regla: Multiplique por dos.

Continúe jugando con una nueva regla. Comience con reglas fáciles, tales como sumar 5 ó restar 3.

Después podrá utilizar reglas más elaboradas que requieran dos ó más pasos. Mientras juegue, cambie el lugar de la variable. Ensaye alguna de estas reglas: $2n+4$, $3n-1$, $20-n$, $n \bullet n$, $n \bullet n - 1$, $n/2$, $n(n+1)$, etc.
Para cada uno de estos patrones se repite el proceso: ver, describir, registrar.

PIENSE UN NUMERO (PUN)

Estas actividades servirán para ayudar a los estudiantes a explorar expresiones algebraicas y reglas, y para desarrollar el concepto de variable. Se debe enfatizar en la destreza de representar gráficamente dichas expresiones y las operaciones aritméticas involucradas en ellas. De este modo el significado de adición, sustracción, multiplicación y división se vuelve más claro y también el significado de la variable, ya que al representar a ésta con una figura, vemos cómo puede variar. Los estudiantes podrán también verificar que sus PUN trabajan para diversos valores.

Hay tres diferentes niveles de representación de un PUN. La primera es en palabras, es decir, las instrucciones. La segunda es una representación pictórica y la tercera la representación algebraica.

El énfasis de esta unidad está en las dos primeras representaciones: palabras y gráficos. La notación algebraica tomará tiempo en llegar.

Un ejemplo de las tres representaciones se muestra en el cuadro abajo. La actividad 7 contiene un ejemplo de sesión con PUNs.

Palabras	Gráficos	Algebraico	Verificación
Piense un número	□	n	7
Añada 1	□ + 1	n+1	8
Multiplique por 2	□ + 1 □ + 1	2n+2	16
Reste el número que pensó al principio	□ + 1 + 1	n+2	9
Reste 2	□	n	7

Su resultado es el número que usted pensó al principio.

Para empezar a usar PUNs debe leer primero las instrucciones y decir a sus estudiantes que las sigan.

Pregunte a los alumnos con qué número comenzaron. Repita el proceso hasta que ellos puedan verificar el PUN para diferentes números.

Para comprobar la razón de que los PUNs trabajan, dibuje la representación pictórica más cercana a las palabras. Usando dibujos y palabras elabore sus propios PUNs y ponga a los alumnos a verificarlos con diferentes números.

Al expresar los PUNs algebraicamente muestre el paralelismo existente con la notación algebraica, pero recuerde que no se debe ir tan lejos en esta unidad. Recuerde que los conceptos de variable, multiplicación y división son más importantes aquí.

Las siguientes actividades se realizarán en hojas de trabajo, las cuales aparecen en el anexo.

ACTIVIDAD 1

OBSERVANDO Y CONTANDO PATRONES.

Objetivo: Los estudiantes verán y describirán patrones físicos y pictóricos.

Introduzca la unidad disponiendo de un patrón que usted haya creado usando bloques o algún otro objeto físico. Pregunte al estudiante sobre la figura que seguiría en el patrón presentado. Deben describir lo que ven. Deben construir también la figura que sigue. Repita este proceso con varios patrones físicos, luego repita el proceso usando dibujos de los patrones.

Para realizar la actividad primera, los estudiantes completarán las hojas de trabajo 1 y 2.

ACTIVIDAD 2

REGISTRANDO PATRONES

Objetivo: Los estudiantes registrarán los patrones de figuras en palabras.

Discuta las hojas de trabajo 1 y 2 con sus estudiantes y pídales que describan los patrones vistos en clase. Indague si alguno percibió algún patrón de manera diferente. Pídale a éstos que describan lo que vieron. Pídales que registren con palabras los modelos o patrones que ellos observaron.

Para practicar viendo, contando y registrando los patrones en palabras, los estudiantes completarán la hoja de trabajo 3.

ACTIVIDAD 3

VIENDO, CONTANDO
Y REGISTRANDO PATRONES

Objetivo: Los estudiantes practicarán viendo, contando y registrando patrones pictóricos.

Discuta la hoja de trabajo 3. Que los estudiantes lean algunas de sus descripciones y discutan las diversas maneras como ellos ven los patrones. A los estudiantes se les dificulta hacer sus descripciones pues temen que éstas no sean comprendidas por los demás.

Después de la discusión de los patrones de la hoja de trabajo 3, dígale a los estudiantes que confeccionen sus propios patrones pictóricos. Haga intercambio entre ellos y que vean, cuenten y registren.

ACTIVIDAD 4

DE PATRONES PICTÓRICOS
A PATRONES NUMÉRICOS

Objetivo: Los estudiantes trasladarán los patrones pictóricos a patrones numéricos.

Se empezará esta clase jugando "¿Cuál es mi regla?". Se tomarán ahora patrones que han sido dibujados para transformarlos en patrones numéricos.

Dibuje este patrón, o uno similar, en el pizarrón o en el retroproyector.

			XX
		XX	XX
	XX	XX	XX
XX	XX	XX	XX

Pregunte a los estudiantes sobre el tipo de patrón que se establece y dígales que dibujen las próximas dos figuras del patrón.

Pregúnteles cuántas x se usaron en la primera figura, en la segunda, en la tercera, y así sucesivamente.

Registre estas respuestas en una tabla como la siguiente:

Forma #	Número de x
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12

Dibuje una flecha de la primera a la segunda columna para cada fila. Diga: "Doy al 1 el 2, al 2 el 4, al 3 el 6. Si estamos jugando, ¿cuál es mi regla?, ¿alguien puede adivinar cuál es?"

Si ninguno ve la regla, dibuje algunas figuras más y registre el número de x que se necesitan. Alguien debería establecer que la regla es "multiplicar por 2". Escriba la regla debajo de la tabla. Use palabras, no símbolos. Repita el proceso con otro patrón.

Los estudiantes han usado los patrones que han completado en la hoja de trabajo 3 y registrado los patrones pictóricos en patrones numéricos en la hoja de trabajo 4. En un paso posterior han tratado de encontrar la regla. Un problema que se puede presentar al hacer esta actividad es que vean los patrones de la segunda columna de la tabla y quieran usarlos como la regla. Enfatice que existe un patrón en la tabla pero que se necesita encontrar la regla que se pueda aplicar al número que se encuentra en la primera columna para obtener el número que se encuentra en la segunda columna. Mientras se discuten los resultados de esta hoja de trabajo, pregunte a sus alumnos si es posible establecer una relación entre el patrón en la segunda columna y la regla.

Distribuya hojas en blanco entre sus alumnos al fin de esta unidad para que establezcan sus propios patrones

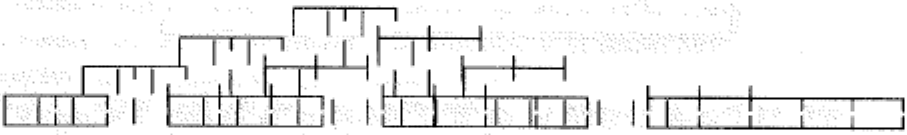
En esta actividad se usa la hoja de trabajo número 4.

ACTIVIDAD 5

PREDECIR EL N-AVO TERMINO EN EL PATRÓN.

Objetivo: Los estudiantes predicen el número de figuras necesarias para un término desconocido del patrón.

Dibuje el siguiente patrón sobre la pizarra o el retroproyector:



Regístrelo en una tabla y encuentre la regla. Pregunte a los estudiantes cuántos cuadrados se necesitan para hacer la 10ma figura, la figura #25, la figura #100... Ayúdelos a encontrar la regla que utilizarán para contestar a estas preguntas.

Los estudiantes han completado la hoja de trabajo # 5 (note que realmente se está evaluando funciones y varios valores de la variable).

Después se discute la hoja # 5.

Los estudiantes completan la hoja de trabajo 6. Esta hoja provee una transición entre los patrones geométricos y los patrones numéricos.

ACTIVIDAD 6

REGISTRANDO PATRONES NUMÉRICOS

Objetivo: Los estudiantes registrarán patrones numéricos.

Esta actividad es similar a la actividad #4. Esta vez se registrarán patrones numéricos en vez de patrones geométricos. La tabla que se usará es como ésta:

término	número
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Use este patrón numérico: 2, 7, 12, 17, __ , __ , __, ... Pida a los alumnos que llenen los espacios en blanco. Registre este patrón numérico en una tabla. Discuta el significado de la palabra "término".

Pida a los estudiantes que encuentren la regla que les permitirá encontrar cualquier término de su patrón.

Haga sus propias secuencias numéricas y muéstrele a los estudiantes cómo registrarlas en una tabla.

Los estudiantes completan la hoja # 7. Después de discutirla puede pedirles que predigan el 10mo, 25avo o 100mo término del patrón.

ACTIVIDAD 7

INTRODUCIENDO PUNs

Objetivo: Los estudiantes explorarán el concepto de variable.

Lea la actividad PUN antes de hacer esta actividad. Empiece leyendo algunos de esos trucos numéricos a la clase. La ayuda de una calculadora es importante pero no absolutamente necesaria.

Edad y fecha de cumpleaños:

Escriba su edad. Súmele 5. Multiplique el resultado por 25. Añada el día de su cumpleaños. Multiplique por 2. Reste 500. Observe el resultado: los primeros 2 dígitos son su edad y si usted toma la mitad de los últimos dos dígitos tendrá la fecha de su cumpleaños.

Consiguiendo el 2:

Escriba cualquier número. Añádale 4. Multiplique por 2. Réstele 4. Divídalo por 2. Reste el número original. La respuesta es 2.

Cualquier número:

Escriba cualquier número. Multiplíquelo por 3. Añádale 6. Reste el número original. Divida por 2. Reste 3. Su respuesta es el número con el cual se comenzó.

Dirección y edad:

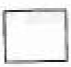
Escriba el número de su casa. Multiplíquelo por 2. Añada 5. Multiplíquelo por 50. Añada su edad. Añada 365. Reste 615. Vea su respuesta. Los últimos dos dígitos son su edad y los primeros dígitos son la dirección de su casa.

Discuta con su clase por qué creen que estos "trucos" funcionan. Para examinar el por qué utilice uno de los dos últimos ejemplos y dibuje figuras para mostrar lo que sucede. Mientras usted está hablando, a través del problema muéstrele a los estudiantes lo que se debería dibujar a la par de cada instrucción. Un ejemplo de una sesión para "cualquier número", es la que sigue:

Las instrucciones y dibujos

Qué se debe decir

Escriba cualquier número

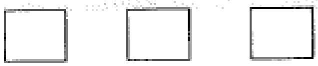


¿Qué se puede utilizar para representar cualquier número? (si los estudiantes no sugieren ningún símbolo, hágalo usted)

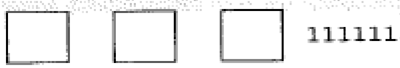
¿Qué decir de una caja? Podría significar 2 ó 16 ó 25. Si no sé cuánto es, podría ser cualquier cosa.

¿Qué significa multiplicar por 3? (Solicite respuestas) ¿Cómo puede dibujarse esto?

Multiplíquelo por 3



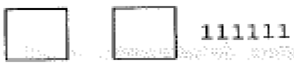
Añada 6



¿Cómo se puede mostrar la suma de 6?

Reste el número que usted escribió originalmente

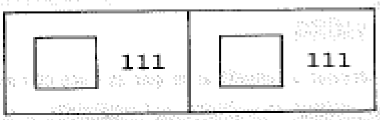
¿Qué significa restar?



¿Qué quitaríamos?

¿Qué es lo que dejamos?

Divida por 2



¿Cómo se puede ilustrar la división por dos? (Muestre a los estudiantes cómo dividir lo que tiene en dos grupos iguales). Luego escriba uno de esos grupos.

Reste 3

¿Cómo se puede ilustrar la resta de 3?
¿Qué nos dejamos?

Su respuesta es su número original.

¿Es esto lo que tenemos?

Repita este procedimiento para otro ejemplo. Que los alumnos traten de hacer su propio PUN, dibujando primero y luego escribiendo las instrucciones. Haga que sus alumnos verifiquen que su PUN funciona.

ACTIVIDAD 8

PRÁCTICAS CON PUNs

Objetivo: Los estudiantes practicarán interpretando PUNs

Las hojas 8, 9 y 10 pueden usarse para ayudar a los estudiantes a: escribir instrucciones para PUNs dados los gráficos y dibujar gráficos cuando se dan las instrucciones.

Mientras se discuten las hojas de trabajo continúe verificando los PUNs para números.

Cuando los estudiantes ya manejan correctamente el asunto, trate de que ellos hagan sus propios PUNs.

Continúe enfatizando que la caja puede representar a cualquier número. Su valor varía.

ACTIVIDAD 9

NOTACIÓN ALGEBRAICA

Objetivo: Los estudiantes escribirán expresiones algebraicas.

¿Cuánto espacio toman los "PUNs"? ¿Hay alguna forma de abreviar o simplificar lo que se hace con los "PUNs"? El propósito de esta actividad es introducir la notación algebraica. Use preguntas semejantes a las anteriores para animar a la clase. Use alguno de los PUNs ya hechos y escriba simbólicamente lo que sucede.

Los estudiantes completan la hoja de trabajo # 11.

ACTIVIDAD 10

POSIBILIDADES

Objetivo: Los estudiantes explorarán escribiendo expresiones numéricas.

Es muy útil para los estudiantes explorar los posibles números que pueden usarse para satisfacer ciertas condiciones. En lugar de dar a los estudiantes problemas para los cuales ellos deben dar las respuestas, el proceso puede revertirse provechosamente; déles a ellos una respuesta y déjelos que ellos confeccionen el problema.

Pida a los estudiantes que encuentren modos diferentes cómo ellos pueden llenar los espacios en blanco para que el resultado sea 12. En medio de cada espacio en blanco debe estar una operación (+,-,.,:)

12 = __ __ __

Discuta sus resultados y haga problemas similares.

Pida a los estudiantes diferentes maneras de poner paréntesis y encuentre el valor faltante para completar la expresión:

8 = 24 + 4 + 2 × ______

Discuta resultados. Pida a los estudiantes que expliquen las estrategias que utilizaron para resolver el problema. Una variedad sin fin de problemas pueden ser expuestos por los alumnos. Escoja algunos.

Los estudiantes hacen la hoja de trabajo # 12.

ACTIVIDAD 11

ORDEN DE LAS OPERACIONES

Objetivo: Los estudiantes tendrán en cuenta el orden en las operaciones cuando evalúan expresiones.

Pida a los estudiantes que le digan a qué es igual 3 + 4 • 2. Pregúnteles si podría ser igual a otro número. Discuta la necesidad de llegar a un acuerdo respecto al orden en que deben realizarse las operaciones. Introduzca el orden en las operaciones y haga los ejemplos apropiados.

Los estudiantes completan la hoja de trabajo # 13.

ACTIVIDAD 12

DARLE VALOR A LA EXPRESIÓN

Objetivo: Los estudiantes evaluarán expresiones algebraicas.

Pida a los alumnos que escriban expresiones algebraicas para las reglas: "sumar 5", "multiplicar por 2 y añadir 3", "multiplicar por 4 y restar l".

Seleccione "añadir 5" y pregunte cuál es su valor. Repítalo con las otras reglas. Antes de ponerlos a trabajar en la próxima hoja de trabajo, se debería permitir a los estudiantes ver que el valor de cada expresión depende del valor que se escoja para la variable. Relacione esto con la predicción de las formas que se necesitan para dibujar alguna de las figuras de los patrones de la hoja de trabajo # 5. Muéstrele a los estudiantes cómo evaluar expresiones algebraicas y haga los ejemplos apropiados.

Los estudiantes completan la hoja de trabajo # 14. Esta les proporciona prácticas sobre evaluación de expresiones con una variable y de expresiones con más de una variable.

ACTIVIDAD 13

RESOLVIENDO ECUACIONES

Objetivo: Los estudiantes resolverán ecuaciones intuitivamente.

Anterior a cualquier tratamiento formal de resolución de ecuaciones, es útil que los estudiantes primero resuelvan ecuaciones intuitivamente. El método "encubierto" estimula a los estudiantes a usar el sentido común y a razonar en vez de utilizar las reglas para resolver ecuaciones. El método "encubierto" es una de las maneras de resolver ecuaciones, no es el único modo; estimule a los estudiantes a resolver ecuaciones de la manera que ellos lo deseen.

Escriba la expresión "n + 5" sobre el pizarrón o el retroproyector. Pregúntele a los estudiantes bajo qué circunstancias esa expresión tomará el valor 9. Utilice la discusión que se da en la clase para escribir la expresión $n + 5 = 9$ y para contestar la pregunta anteriormente formulada. Enfatizar que resolver una ecuación es encontrar el valor de la variable cuando ya se conoce el valor de la expresión, podría minimizar la confusión de lo que realmente significa una ecuación. Pida a los estudiantes que verifiquen sus resultados. Ensaye más ejemplos, tales como: ¿Bajo qué circunstancias la expresión **2x** tiene un valor de 12? ¿Cuándo **9 - u** tiene un valor de 6? ¿Cuándo **3a + 5** tiene un valor de 11? Escriba las ecuaciones y resuélvalas. Repita este proceso con ejemplos apropiados para la clase. Mientras no resuelva ecuaciones más complicadas, usted puede seguir utilizando el método "encubierto". No es necesario que lo llame así en la clase. Simplemente úselo. Discuta también los otros posibles métodos que los alumnos usen para resolver las ecuaciones.

Los estudiantes completan las hojas de trabajo I5,I6 y I7.

Un ejemplo del método "encubierto" se verá a continuación.

EL MÉTODO ENCUBIERTO PARA RESOLVER ECUACIONES INTUITIVAMENTE.

Para resolver: $3n + 6 = 18$

cubra la variable $\square + 6 = 18$

Pregunte qué se debe añadir a 6 para obtener 18. Los estudiantes responderán 12. $12 + 6 = 18$

Así que la parte cubierta sería 12. Así que $\square = 12$

Descubra la variable y deje que esa parte sea igual a 12 $3n = 12$

Pregunte qué número multiplicado por 3 da 12 $n = 4$

Los estudiantes han verificado que $3n + 6$ será I8 cuando n es 4.
Los estudiantes trabajarán las hojas de trabajo 15, 16 y 17.

ACTIVIDAD 14

ESTUDIO DE RESTRICCIONES

Objetivo: Los estudiantes explorarán las restricciones sobre una ecuación.

Explorar las restricciones implícitas en un problema puede ayudar a los estudiantes a entender mejor las variables y sus dominios. Cualquier ecuación tiene implícitas sus restricciones. Por ejemplo, considere:

Area = largo × ancho

Se asume que cada cantidad representa un número positivo o, tal vez, cero. También es justo asumir que la longitud y el ancho están medidos con la misma unidad de medidas (centímetros ó pulgadas, por ejemplo).

Los matemáticos experimentados entienden fácilmente estas suposiciones. Para los alumnos que inician el estudio del Álgebra esto a veces no es tan claro. A estos estudiantes les cuesta captar las restricciones impuestas sobre las ecuaciones.

Discuta con la clase las restricciones en este problema:

"Encuentre 3 números enteros positivos cuya suma sea 100".

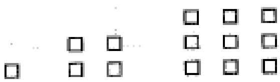
Una restricción inicial es que los números sean positivos. Otra es que ellos deben sumar 100. Podría parecer que los números podrían ser del 1 al 99, pero como se trata de 3 números, la escogencia del primer número debe hacerse con números del 1 al 98. Supóngase que se escoge el 20. ¿Existen restricciones nuevas para el segundo número? Claro, este debe ser un número del 1 al 79. Supóngase que tomamos el 7. Ahora el tercer número está completamente determinado. Luego que se discute el problema, se podría poner restricciones adicionales al problema original, tales como: el primer número debe ser el doble del segundo. Y luego imponer otra condición: el tercer número debe ser 4 unidades mayor que el primero.

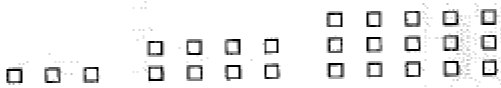
A través de estas actividades los estudiantes pueden ver cómo y por qué se establecen las limitaciones sobre los números y pueden reconocer las restricciones asumidas.

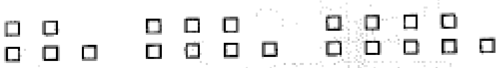
Use los problemas de la hoja de trabajo # 18 para discutir las restricciones y las presunciones.

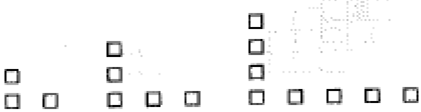
HOJA DE TRABAJO Nº. 1

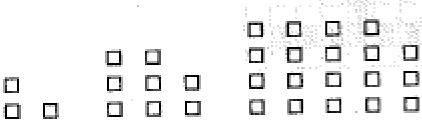
Dibuje las tres figuras siguientes de cada patrón.

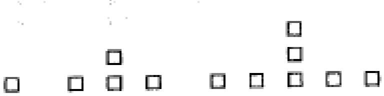
1. 

2. 

3. 

4. 

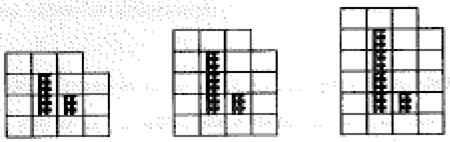
5. 

6. 

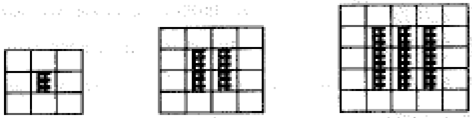
HOJA DE TRABAJO N°. 2

Dibuje las dos figuras siguientes en cada patrón.

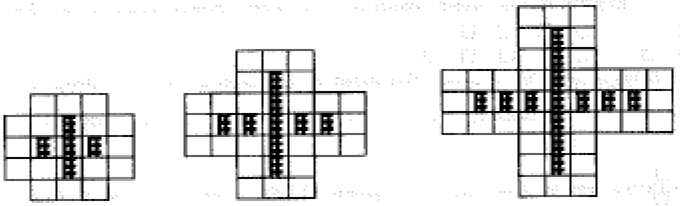
1.



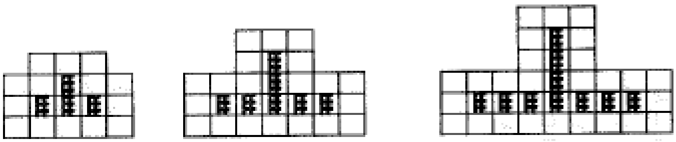
2.



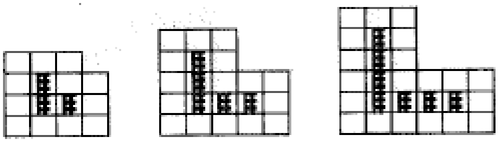
3.



4.



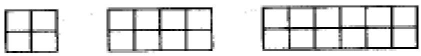
5.



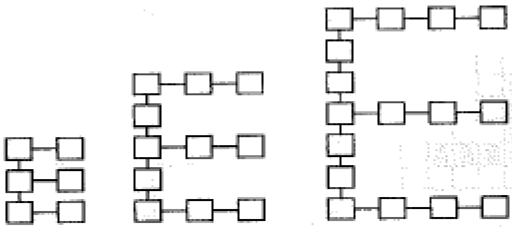
HOJA DE TRABAJO Nº. 3

Dibuje las dos figuras siguientes para cada patrón. Luego describa el patrón.

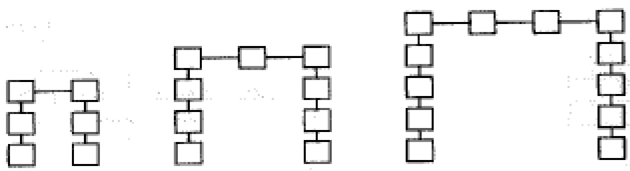
1.



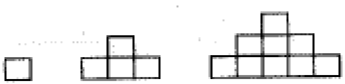
2.



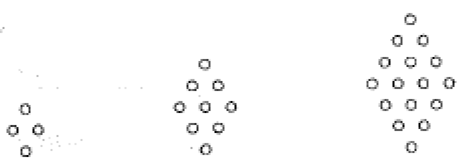
3.



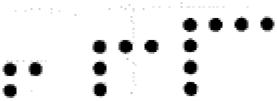
4.



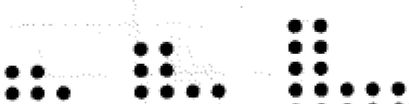
5.



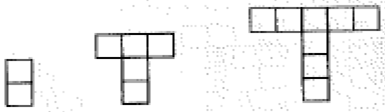
6.



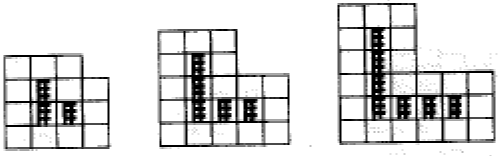
7.



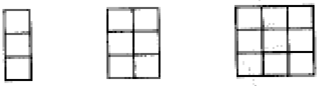
8.



9.



10.



HOJA DE TRABAJO N°. 4

Use los patrones de la HOJA DE TRABAJO No. 3. Registre el número de figuras necesarias para hacer cada figura del patrón.

1.

Figura	cuadrados

regla: ________________

2.

Figura	cuadrados

regla: ________________

3.

Figura	cuadrados

regla: ________________

4.

Figura	cuadrados

regla: ________________

5.

Figura	cuadrados

regla: ________________

6.

Figura	puntos

regla: ____________________

7.

Figura	puntos

regla: ____________________

8.

Figura	cuadrados

regla: ____________________

9.

Figura	cuadrados

regla: ____________________

10.

Figura	cuadrados

regla: ____________________

HOJA DE TRABAJO N°. 5

Para cada patrón de la HOJA DE TRABAJO N°. 4, copie la regla que encontró. Luego use la regla para encontrar el número de formas que se necesitan para hacer cada una de las figuras en el patrón, como se indica en las tablas de abajo.

1. Regla ____________

No. de figuras	cuadrados
10	
25	
50	

2. Regla ____________

No. de figuras	cuadrados
10	
25	
50	

3. Regla ____________

No. de figuras	cuadrados
15	
30	
75	

4. Regla ____________

No. de figuras	cuadrados
15	
30	
75	

5. Regla ____________

No. de figuras	puntos
20	
40	
80	

6. Regla ____________

No. de figuras	puntos
10	
25	
50	

7. Regla ____________

No. de figuras	puntos
25	
40	
100	

8. Regla ____________

No. de figuras	cuadrados
15	
35	
60	

9. Regla ____________

No. de figuras	cuadrados
14	
36	
95	

10. Regla ____________

No. de figuras	cuadrados
30	
50	
125	

HOJA DE TRABAJO No. 6

Complete los patrones de abajo

1. I, II, III, IV, ______, ______, ______
2. ZA, YB, XC, WD, ______, ______, ______
3. a, c, e, g, _____, _____, _____, _____
4. DEF, IJK, NOP, ______, ______
5. a, b, d, g, _____, _____, _____
6. A, Z, B, X, C, _____, _____, _____, _____
7. ??????!!!!!, ?????!!!!, ????!!!, ______, ______
8. 121, 1221, 12221, ______, ______, ______
9. 34, 34344, 343443444, __________, __________
10. 2, 4, 2, 8, 2, 16, _____, _____, _____, _____
11. 3, 7, 15, 31, _____, _____, _____, _____
12. 1, 4, 3, 6, 5, _____, _____, _____, _____
13. 43, 35, 28, 22, _____, _____, _____, _____
14. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ___, ____, ____, ____

Confeccione algunos patrones literales o numéricos. Deje algunos lugares en blanco y pida a otros compañeros que los completen.

15. ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___
16. ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___
17. ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___

7. **2, 5, 10, 17, __, __**

Término	número
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Regla: ____________________

8. **2, 6, 12, 20, __, __**

Término	número
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Regla: ____________________

9. **4, 7, 10, __, __, __**

Término	número
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Regla: ____________________

10. **4, 5, 6, __, __, __**

Término	número
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Regla: ____________________

11. **0, 1, 2, __, __, __**

Término	número
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Regla: ____________________

12. **6, 12, 20, 30, __, __**

Término	número
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Regla: ____________________

HOJA DE TRABAJO N°. 7

Encuentre los números que faltan en cada patrón, complete la tabla y encuentre una regla para el patrón.

1. **3, 6, 9,** __, __, __

Término	número
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Regla: ____________________

2. **4, 8, 12,** __, __, __

Término	número
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Regla: ____________________

3. **3, 5, 7,** __, __, __

Término	número
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Regla: ____________________

4. **5, 7, 9,** __, __, __

Término	número
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Regla: ____________________

5. **2, 5, 8,** __, __, __

Término	número
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Regla: ____________________

6. **1, 4, 9,** __, __, __

Término	número
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Regla: ____________________

HOJA DE TRABAJO Nº. 8

Dibuje representaciones pictóricas para estas instrucciones.

1. a. Piense un número — **a** ______________________

   b. Añada 4 — **b** ______________________

   c. Multiplique por 2 — **c** ______________________

....

2. a. Piense un número — **a** ______________________

   b. Multiplique por 3 — **b** ______________________

   c. Añada 2 — **c** ______________________

....

3. a. Piense un número — a ______________________

   b. Añada 2 — **b** ______________________

   c. Multiplique por 2 — **c** ______________________

....

4. a. Piense un número — **a** ______________________

   b. Añada 1 — **b** ______________________

   c. Multiplique por 4 — **c** ______________________

   d. Divida por 2 — **d** ______________________

   e. Reste 1 — **e** ______________________

HOJA DE TRABAJO N°. 9

Dibuje representaciones pictóricas para cada uno de estos PUN

1. a. Piense un número
   b. Multiplique por 4
   c. Añada 8
   d. Divida por 2
   e. Reste 4
   f. Divida por 2

Su respuesta es el número con el cual usted empezó.

a.

b.

c.

d.

e.

f.

....

2. a. Piense un número
   b. Añada 7
   c. Multiplique por 3
   d. Reste 18
   e. Divida por 3
   f. Reste el número original

Su respuesta es 1

a.

b.

c.

d.

e.

f.

3. a. Piense un número
   b. Añada 3
   c. Multiplique por 4
   d. Reste 8
   e. Divida por 2
   f. Reste 4
   g. Divida por 1
   h. Reste 1

Su respuesta es el número con el que usted empezó.

a.

b.

c.

d.

e.

f.

g.

h.

4. a. Piense un número
   b. Multiplique por 4
   c. Añada 8
   d. Divida por 2
   e. Reste 4
   f. Reste el número original

Su respuesta es el número con el que usted empezó.

a.

b.

c.

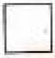
d.

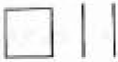
e.

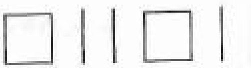
f.

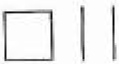
HOJA DE TRABAJO N°. 10

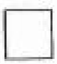
Escriba las instrucciones para estas figuras

1. a.  a. ______________________

b.  b. ______________________

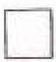
c.  c. ______________________

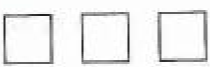
d.  d. ______________________

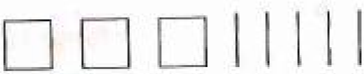
e.  e. ______________________

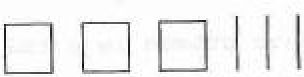
Su respuesta es ______________________

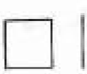
. . . .

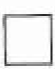
2. a.  a. ______________________

b.  b. ______________________

c.  c. ______________________

d.  d. ______________________

e.  e. ______________________

f.  f. ______________________

Su respuesta es ______________________

Dibuje figuras para las instrucciones. Escriba instrucciones para las figuras.

5. a. Piense un número

   b. Añada 5

   c. Multiplique por 3

   d. Reste 1

   e. Añada el número con el que usted empezó

   f. Divida por 2

   g. Reste 7

   h. Divida por 2

Su respuesta es el número con el cual usted empezó.

a.

b.

c.

d.

e.

f.

g.

h.

....

6. a. □

   b. □ | | | |

   c. □ | | | | □ | | | |

   d. □ | | | □ | | |

   e. □ | | | □ | | | □

   f. □ | |

   g. □

a. ______________________

b. ______________________

c. ______________________

d. ______________________

e. ______________________

f. ______________________

g. ______________________

Su respuesta es ______________________

(HOJA DE TRABAJO N°. 10, CONTINUACION I)

3. a. | | | a. ____________

b. | | | □ b. ____________

c. | | | □ | | | □ c. ____________

d. | | | □ | | | □ | | | | d. ____________

e. | | | | | □ e. ____________

f. | | | | | f. ____________

Su respuesta es ____________

....

4. a. □ a. ____________

b. □ □ b. ____________

c. □ □ | | | | | | c. ____________

d. □ | | | d. ____________

e. | | | e. ____________

Su respuesta es ____________

7. a. Empiece con 3

b. Piense un número y súmeselo

c. Reste 1

d. Multiplique por 4

e. Divida por 2

f. Reste 2

g. Divida por 2

h. Reste 1

La respuesta es el número que usted pensó.

a.

b.

c.

d.

e.

f.

g.

h.

....

8.	a. □	a. ________________
	b. □ □ □	b. ________________
	c. □ □ □ | | | | | | | | |	c. ________________
	d. □ | | |	d. ________________
	e. □ |	e. ________________
	f. |	f. ________________

Su respuesta es ________________

Impreso en el Programa de Publicaciones e Impresiones
Universidad Nacional
960455—P.UNA